ÉTÉ 2019

Devoirs de vacances

Mathématiques

collège MELKART
soyons à l'écoute

CLASSE DE 3ème

vers la 2nde

Il est vivement conseillé aux élèves des classes de 3ème de profiter de leur temps pendant les vacances, pour renforcer leurs acquisitions, et consolider leurs compétences.

Les exercices qui suivent constituent une révision globale du programme de mathématiques et préparent bien les élèves à entamer dans de bonnes conditions le cycle secondaire. Ils sont répartis selon les deux parties Algèbre et Géométrie formés du même nombre d'exercices.

Bonnes vacances à tous !

Activités numériques et calculs algébriques

1- Effectuer les calculs suivants ; donner une écriture simplifiée des résultats :

$$A=\frac{(-2)^3.(-3)^2}{(-5)^2.6^2} \quad ; \quad B=\left[\frac{2^3.(-3)^2}{36}\right]^{-1} \quad ; \quad C=\left[\frac{(-16).3^2}{24.(-3)}\right]^{-1}.\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$D=\frac{(2a^2b^3)^3}{(3ab^4)^2} \quad ; \quad E=\frac{(ab^3)^2}{a^3b^2}\left[\frac{a}{b^4}+\frac{a^2}{b^3}\right]; \quad F=\frac{a^2b^3}{(ab)^3}:\left(\frac{a^2b^4}{a^3b^5}\right)^{-1}$$

$$G=\left[\frac{2a^3b^{-3}c^{-1}}{a^{-3}b^{-4}c^{-2}}\right]^2 \quad ; \quad H=\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2.\left(-\frac{2}{5}\right)^2\right].\left[\frac{2^3.121}{11^2.17}\right]$$

$$I=a^2+4b^2+(a+b)^2-(a-b)^2 \quad ; \quad J=\left(\frac{2a}{3}-\frac{5a}{2}\right)^2-\left(\frac{4a^2}{9}+\frac{25a^2}{4}\right)$$

2- Factoriser les polynômes suivants :

$*\ x^2-49$; $*\ x^4-y^4$; $*\ -3x^2+12x-12$; $*\ x^2+4x+4-y^2$

$*\ (x-3)(x^2-x+1)+(2x-1)(x-3)-(x^2+4)(x-3)$;

$*\ (x-2)^2-(3x+1)(x-2)+(4-2x)(x+1)$.

3- On donne : $f(x)=(x+6)^2-2(x+1)(x+6)$ et $g(x)=(3x+2)^2-4(x-2)^2$.

a) Développer, réduire et ordonner $f(x)$ et $g(x)$.

b) Ecrire $f(x)$ et $g(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

c) Calculer $f(0)$, $f(-3)$ et $g\left(-\frac{2}{3}\right)$. Résoudre l'équation $g(x)=0$.

d) Soit $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$. Simplifier $h(x)$ après avoir précisé les conditions d'existence.

f) Calculer $h(\sqrt{2})$. Résoudre : $*\ h(x)=0$ $*\ h(x)=1$ $*\ h(x)=-\frac{5}{16}$ $*\ h(x)\geq 0$.

4- Résoudre les équations suivantes :

a) $x^3+x^2-9x-9=0$ b) $(x-1)^2=(2x+1)^2$.

5- Soit les expressions :

$$A=\left(1-3\sqrt{2}\right)^2-\left(5+\sqrt{3}\right)^2 \text{ et } B=\left(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{2}+1-\sqrt{3}\right)$$

Développer et simplifier les expressions A, B et $\frac{A}{B}$.

6- On donne $a=\sqrt{17+12\sqrt{2}}$ et $b=\sqrt{17-12\sqrt{2}}$, et on pose $u=a+b$ et $v=a-b$.
Montrer que $ab=1$. Calculer u^2 et v^2 ; en déduire u, v et une expression plus simple de a et b.

7- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$*\ (x-2)(x+1)=(x-3)(x-1)-4(x-4)$; $*\ (2x+5)(x-1)=x^2-1$

$*\ \frac{3(x+5)}{7}+4=\frac{1-3x}{28}$; $*\ \frac{21-x}{36}+\frac{11}{4}=2(\frac{x}{3}-1)-\frac{5(2x-15)}{12}$

$*\ \frac{3x}{14}-\frac{x}{15}+1=\frac{x}{6}+\frac{7}{3}$; $*\ (3x-6)(x^2-1)-(5x-10)(x+1)^2=0$

$*\ (3x-1)(8x-3)-(1-3x)(x-1)-2(3x-1)(x+1)=0$

8- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$* \; x^2 + (x+4)^2 > 2(x-1)(x+2) + 38$

$* \; \frac{9}{14}\left(2x+\frac{2}{3}\right)-\frac{5}{4}\left[\frac{6x}{7}-2(x-4)\right] \geq 0$

$* \; \frac{x+1}{2}-\frac{x+3}{3} > \frac{1-x}{3}+\frac{3x+1}{6}$

$* \; \frac{(x-1)(5x-2)}{3}-x^2 \leq \frac{2(x-1)(x+1)}{3}$

9- On considère les fonctions f et g : $f(x) = 4x^2 - 1 - (2x-1)(x+6)$

$g(x) = (x-5)(2x-3) + x^2 - 25$

a) Factoriser $f(x)$ et $g(x)$. On pose q la fonction rationnelle définie par : $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

b) Quel est le domaine de définition de q ? Simplifier $q(x)$. Calculer $q(\sqrt{2})$.

10- Effectuer les calculs suivants ; rendre rationnels les dénominateurs.

a) $(3\sqrt{2}-\sqrt{8}+\sqrt{18})(3-\sqrt{12}+\sqrt{27})$

b) $\sqrt{5}(\sqrt{5}-\sqrt{2})(3\sqrt{5}-2\sqrt{2})$

c) $\sqrt{7}+\sqrt{2}.\sqrt{14}-\sqrt{3}.\sqrt{21}$

d) $\sqrt{75}+2\sqrt{147}-9\sqrt{48}$

e) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$

f) $\frac{2-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+4}$

g) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

h) $3\sqrt{2}\,(3-\sqrt{3})+\sqrt{27}(\sqrt{2}-1)$

11- Trouver trois entiers naturels consécutifs dont la somme est égale à 453.

12- On considère la fonction polynôme f : $f(x) = (x-1)(2x-3)^2 - (x-1)^2(2x-3)$

Factoriser $f(x)$. Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

13- Trouver un nombre entier naturel dont le quart surpasse de 10 le sixième.

14- Un objet payé 500 € est mis en loterie. En vendant le billet de loterie à 12 €, on gagne autant que ce qu'on perdrait en le vendant à 8 €. Quel est le nombre des billets de loterie ?

15- On pose, pour tout réel x : $A(x) = x + 1$ et $B(x) = x - 1$

$*$ Calculer la valeur de $A(x) \times B(x)$ pour : $x = 10^{-3}$; $x = -10^{-3}$; $x = 2\sqrt{3}$; $x = -2\sqrt{3}$.

$*$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $A(x) \times B(x) = 48$.

$*$ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$.

16- On pose $f(x) = (3x-4)(x-1) - 3(1-x)^2 + x^2(4x-4)$.

a) Développer, réduire et ordonner $f(x)$.

b) Factoriser $f(x)$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

c) On pose $F(x) = \frac{4x^3-4x^2-x+1}{(5-x)(4x^2-1)}$. Donner l'ensemble D de définition de F.

Simplifier $F(x)$ pour $x \in D$.

d) Calculer $F(3)$, $F(1)$, $F\left(\sqrt{5}\right)$.

17- Résoudre les systèmes suivants :

* $\begin{cases} 2(x+3y)-3(x-3y)=12 \\ (x-2y)+4(x+y)=17 \end{cases}$

* $\begin{cases} \dfrac{x+2}{4}-\dfrac{2(y-1)}{3}=1 \\ \dfrac{x+3}{4}-\dfrac{3y+1}{3}=-2 \end{cases}$

* $\begin{cases} \sqrt{3}\,x-(1+\sqrt{3})y=2 \\ (3-\sqrt{3})x+2y=-3 \end{cases}$

* $\begin{cases} \dfrac{5x-4}{3}-\dfrac{10x-17}{12}<\dfrac{8x-3}{4} \\ \dfrac{x}{3}-\dfrac{x-18}{2}>3x-\dfrac{11x}{6} \end{cases}$

18- La recette des entrées au musée a été un jour 13 400 € pour 140 entrées de grandes personnes et 55 entrées d'enfants. Le lendemain, les prix d'entrées étaient réduits de 25% pour les grandes personnes et de 50% pour les enfants. La recette s'est alors élevée à 11 200 € pour 180 personnes et 20 enfants.
Quels sont les prix d'entrées normaux pour grande personne et enfant ?

19- La recette d'une salle de cinéma s'élève à 2 396 €. Les places coûtent 26 € à l'orchestre et 21 € au balcon. 101 spectateurs ont assisté à la séance. Combien d'entre eux se trouvaient au balcon ?

20- Démontrer que : $\dfrac{\sqrt{8}+33}{7-\sqrt{2}}=\sqrt{2}+5$.

21- Il y a 5 ans, l'âge de Michel était les deux tiers de l'âge d'Eva. Dans un an, l'âge de Michel sera les trois quarts de l'âge d'Eva. Aujourd'hui, quels sont les âges de Michel et d'Eva ?

22- Calculer : A = $\sqrt{80}-10\sqrt{20}+2\sqrt{45}$; B = $\dfrac{5\sqrt{48}}{4\sqrt{21}} \times \dfrac{3\sqrt{14}}{2\sqrt{75}}$.

23- On donne A(x) = 49x² – 4 – (14x – 4) (4x – 1).

a) Développer, réduire et ordonner A(x).
b) Résoudre A(x) + 8 = 0.
c) Calculer les racines de A(x).

24- On partage une somme entre trois personnes, proportionnellement aux nombres 4, 5 et 7. Calculer la part de chaque bénéficiaire, sachant que le double de la part du premier avec le triple de celle du second font 207 000 LL.

25- Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) 4 (2x+1) + 4x² - 1 = - 3x (2x+1)

b) $x\sqrt{3}+2\sqrt{3} \geq x+2$

26- On pose f(x) = (7x+2)² - (5x+1)² et g(x) = 12x.(1-2x) - 3(2x-1).

a) Développer, réduire et ordonner f(x).
b) Factoriser f(x) et g(x). Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : f(x) = 0 et g(x) = 0.
c) On pose P(x) = $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Pour quelles valeurs de x, P(x) existe-t-il ?

Simplifier dans ce cas P(x). Calculer $P\left(\frac{1}{3}\right)$ et $P\left(\frac{1}{18}\right)$. Prouver que $\sqrt{P\left(\frac{1}{3}\right)} \times \sqrt{P\left(\frac{1}{18}\right)}$ est un décimal.

d) Construire dans un même repère les droites d'équation y = - 2x + 1 et y = 2x + 1.
Trouver graphiquement et par le calcul, la valeur de x tel que P(x) = 1.

27- Les tirelires de Jeanne et de Pierre ne contiennent que des billets de 5 €. Jeanne dit à Pierre :

∗ Si tu me donnais 6 billets, je disposerais alors de deux fois plus d'argent que toi.

∗ Mais si je te donnais 4 billets, les deux sommes d'argent que nous posséderions seraient alors égales.

Traduire cet énoncé par un système d'équations. Quelle est la somme possédée par Jeanne ? par Pierre ?

28- Voici les moyennes trimestrielles d'une classe de 3ème en mathématiques : 7 ; 13 ; 7 ; 9 ; 7 ; 10 ; 10 ; 15 ; 7 ; 13 ; 9 ; 8 ; 7 ; 12 ; 17 ; 16 ; 17 ; 13 ; 11 ; 6 ; 9 ; 13 ; 15 ; 16 ; 13.

a) Ordonner ces notes par ordre croissant et en déduire les notes les plus fréquentes et la note médiane.
b) Regrouper ces notes en classes d'amplitude 3 à partir de la note la plus faible.
c) Tracer le diagramme des fréquences cumulées croissantes à partir de ces classes.
d) Déterminer graphiquement la médiane et comparer les deux résultats.

29- Le tableau suivant fournit l'analyse, par régions et types de produits, de la production sidérurgique de l'année 1979 (en milliers de tonnes).

Type \ Région	Est	Nord	Centre	Sud	Ouest
Fontes brutes	9 261	6 815	0	2 602	738
Aciers bruts	10 232	8 106	747	3 385	888

a) Quelle est la production totale d'aciers bruts pendant l'année 1979.
b) Représenter la répartition de cette production selon les régions, sur un graphique semi-circulaire.
c) Quelle est la production sidérurgique totale ? Représenter la répartition de cette production sur un graphique circulaire.

Travaux géométriques

1- a) α étant un angle aigu, on donne $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Calculer $\cos \alpha$ et $\tan \alpha$.

b) Peut-on calculer un angle α tel que $\sin \alpha = \frac{10}{3}$?

2- a) Dans un triangle ABC rectangle en A, on donne AB = 3 et $\cos \hat{B} = \frac{3}{5}$. Calculer AC et BC.

b) Dans un triangle ABC rectangle en A, on donne BC = 6,4 et $\tan \hat{B} = 0{,}8$. Calculer AB et AC.

3- Soit deux points B et C, tels que BC = 10. On trace le cercle Γ de diamètre [BC].
Construire un point A du cercle Γ tel que BA = 5.

a) Quelle est la nature du triangle ABC ? Calculer AC.
b) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). Calculer HB et HC, en considérant des triangles semblables.

4- Tracer un carré ABCD de 6 cm de côté. Marquer le point E, milieu de [CD].

a) Calculer la distance AE. Donner une valeur approchée à 1 mm près.
b) Soit F le projeté orthogonal de D sur (AE).
Montrer que $EF = \frac{3}{\sqrt{5}}$, puis calculer DF, en utilisant $\cos \widehat{AED}$.

5- Soit ABC un triangle rectangle en A, dans lequel $\hat{B}$ = 60° et BC = 2a.

a) Soit H le projeté orthogonal de A sur [BC]. Calculer AC, AB, AH, BH et CH en fonction de a.

b) On trace la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{B}$ du triangle ABC, elle coupe [AC] en D. Démontrer que les triangles ABD et ABC sont semblables et évaluer leur rapport de similitude.
Établir la relation $AB^2 = AD \times AC$.

6- L'unité de longueur est le centimètre. Soit [AO] un segment de longueur 6 cm ; sur la droite perpendiculaire en O à [AO], de part et d'autre de O, on considère les points B tel que $\widehat{OAB}$ = 45° et C tel que $OC=2\sqrt{3}$ cm.
Le cercle de diamètre [AO] coupe [AB] en D et [AC] en E. On note H son centre.

a) Faire la figure (on prendra $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ pour placer le point C).

c) Quelle est la nature des triangles AOB et AOD ? Montrer que D est le milieu de [AB]. Calculer AB.

c) Quelle est la nature du triangle AOE ?

d) Calculer $\tan \widehat{OAC}$. Utiliser la calculatrice pour trouver la mesure en degrés de l'angle $\widehat{OAC}$.

e) Dans le triangle OAE déterminer $\sin \widehat{OAE}$, puis OE. Démontrer que le triangle OHE est équilatéral.

7- Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité de longueur est le cm.

On considère les droites D_1 et D_2 d'équations : $D_1 : y = 2x + 4$; $D_2 : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

a) Construire D_1 et D_2. Démontrer que D_1 passe par le point B(-5;-6) et que D_2 passe par le point C(5;-1).

b) Montrer que les droites D_1 et D_2 sont perpendiculaires.

c) Soit A le point d'intersection des droites D_1 et D_2. Déterminer les coordonnées du point A. Calculer les longueurs AB et BC.

d) Soit α la mesure, en degrés, de l'angle $\widehat{ACB}$. Déterminer $\sin \alpha$.
En déduire une valeur approchée de α à un degré près par défaut.

8- Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, placer les points A(–1 ; 2), B(2 ; 3) et C(1 ; – 4).

a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$; puis calculer les distances AB, AC et BC.

Déterminer la nature du triangle ABC. Calculer $\cos \hat{C}$.

b) Déterminer l'équation de la droite (BC) et celle de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à (BC).

c) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). Calculer les coordonnées de H.

9- Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A(– 2 ; 2), B(2 ; 0) et C(x ; 3), où x est un réel.

a) Déterminer x pour que le point C appartienne à la médiatrice de [AB]. Dans la suite, on prendra x = 1.

b) On considère le cercle Γ de centre C passant par A et B. Quel est son rayon r ?
Déterminer les coordonnées des points A' et B' diamétralement opposés à A et B sur Γ.

c) Montrer que le triangle ABA' est rectangle isocèle. En déduire la nature du quadrilatère ABA'B'.

d) Montrer que le cercle Γ passe par O. Quels sont les points d'intersection du cercle Γ avec les axes du repère ?

10- Dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points A(3 ; 4), B(1 ; – 2) et C(– 2 ; – 1).

a) Calculer AB, AC et BC. En déduire la nature du triangle ABC.

b) Soit E le milieu de [AC] et D le symétrique de B par rapport à E.
Déterminer les coordonnées de E. Quelle est la nature de ABCD ?

c) Soit E' l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$. Montrer que AE'BE est un losange.

11- Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on marque les points : A(– 3 ; – 2), B(– 4 ; 2), C(5 ; 0) et R(– 7 ; – 3).

a) Calculer AB, AC et BC. Quelle est la nature du triangle ABC ?

b) Démontrer que les points A, B et C sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c) On appelle (d) la tangente en B à ce cercle. Le point R est-il sur (d) ? sur (AC) ?

12- ABC est un triangle équilatéral de côté a. La hauteur issue de A coupe [BC] en H.

a) Calculer AH en fonction de a.
b) Préciser la position du centre O du cercle circonscrit au triangle AHB. Quel est le rayon de ce cercle?
c) Démontrer que les droites (OH) et (AC) sont parallèles.
d) Soit P le symétrique de O par rapport à H. Quelle est la nature du quadrilatère COBP?
e) Démontrer que le quadrilatère AOPC est un parallélogramme.

13- ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 18 mm et AC = 24 mm.
M est le milieu de [BC] ; Δ, la médiatrice de [BC]. Calculer BC.

a) Δ coupe (AC) en H et (AB) en E. Montrer que les triangles EMB et CAB sont semblables. Calculer alors EB et EM.
b) Démontrer que les points E, A, M et C sont sur un même cercle, dont on précisera le centre O et dont on calculera le rayon.

14- Soit un cercle de centre O, de rayon R. Construire un rayon [OJ] puis la médiatrice de [OJ], qui coupe le cercle en A et B, et coupe [OJ] en I. On trace la tangente en A au cercle qui coupe (OJ) en P et (BJ) en Q.

a) Quelle est la nature du quadrilatère AOBJ ?
b) Montrer que les triangles AQB et PAI sont isométriques.
c) Calculer en fonction de R les longueurs AI, PI, PJ et PA.
d) Montrer que le quadrilatère AIJQ est inscriptible dans un cercle dont on précisera le centre et le rayon en fonction de R.

15- On donne un triangle ABC, rectangle en A, dont l'angle $\hat{B}$ mesure 60°. La bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A}$ coupe [BC] en D. La parallèle à (AD) menée par B coupe (AC) en E. On pose AB=a.

a) Calculer en fonction de a, les longueurs BC, AC et AE.
b) La bissectrice de BAE coupe [BE] en I. La perpendiculaire menée de B à (AD) coupe (AD) en H et (AC) en F. Quelle est la nature du quadrilatère AIBH ? Exprimer, en fonction de a, les longueurs FC, AH et BF.

16- ABCD est carré de côté a. On construit un triangle équilatéral dont un côté est la diagonale [AC] et dont le troisième sommet E est situé du côté de B. On désigne par O le milieu de [AC].

a) Montrer que E, B, O et D sont alignés.
b) Calculer BE en fonction de a.
c) Montrer que $EB \times ED = AB^2$.
d) On mène de E la tangente (EP) au cercle circonscrit au carré. Montrer que EP = a.

17- Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par D_1 et D_2 les droites d'équations respectives : $D_1 : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; et $D_2 : y = 2x + 4$.

a) Construire les droites D_1 et D_2.
b) La droite D_1 coupe l'axe des abscisses en A et l'axe des ordonnées en H.
La droite D_2 coupe l'axe des abscisses en B et l'axe des ordonnées en C.
Les deux droites D_1 et D_2 se coupent en K.
Calculer les coordonnées des points A, B, C, H et K.
c) Démontrer que les droites D_1 et D_2 sont perpendiculaires, ainsi que les droites (AC) et (BH).

18- Dans un repère orthonormal, d'axes x'Ox et y'Oy, on donne les points A(5, 0) et B(4, 2).

a) Calculer les longueurs AB, OB et OA. En déduire la nature du triangle OAB.
b) Écrire l'équation de la droite (AB). Le point $C\left(\frac{1}{2}, \frac{17}{2}\right)$ est-il situé sur (AB) ?
c) Déterminer l'équation de la parallèle à (AB) passant par O.
d) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis les coordonnées du point E, image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
e) Déterminer les coordonnées du point D, quatrième sommet du parallélogramme OADB. Justifier que B est le milieu de [ED].

19- a) Les côtés [BC], [CA] et [AB] de longueurs respectives a, b et c d'un triangle ABC sont directement proportionnels aux nombres 7, 5 et 4. Le périmètre de ce triangle étant 32 cm, calculer les longueurs de ses côtés.
b) Soit D un point de [AB]. La parallèle menée de D à (BC) coupe (AC) en E et la parallèle menée de D à (AC) coupe (BC) en F. On pose AD = x. Exprimer en fonction de x et en utilisant la similitude des triangles, les longueurs DE et DF.
c) Déterminer, par le calcul, le nombre x pour que DECF soit un losange.

20- Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les droites $D_1 : 3x - 2y + 4 = 0$ et $D_2 : y = -x + \frac{2}{3}y + 2 = 0$.

a) Indiquer si les points A(-1; 0,5) et B(-2; 5) appartiennent à D_1.
b) Déterminer l'abscisse du point C de D_2 dont l'ordonnée est -3.
c) Construire les droites D_1 et D_2. Que peut-on dire de ces droites ?
d) Déterminer une équation de la droite (AB).
e) Ecrire une équation de la droite D_3 passant par C et perpendiculaire à D_2.
f) Déduire de ce qui précède, les solutions, si elles existent, des systèmes :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 4 = 0 \\ -x + \frac{2}{3}y + 2 = 0 \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} 3x - 2y + 4 = 0 \\ \frac{9}{2}x + y + 4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

21- Dans un système orthonormé x'Ox, y'Oy, on considère les points B (0 ; -2) et C (6 ; 1). On pose D et D' les droites d'équations respectives : $y = -2x+3$ et $y = x - 3$.

a) Tracer D et D', puis placer B et C.
b) On désigne par I le point d'intersection de D et D'. Calculer les coordonnées de I. Déterminer une équation de la droite (BC) et vérifier que les trois points I, B et C sont alignés.
c) On donne le point S(0 ; m), où m est un nombre réel. Calculer SB^2 et SC^2 en fonction de m. Déterminer m pour que le triangle SBC soit isocèle de sommet S (SB=SC).

(Brevet Libanais, juin 1992)

22- [AC] est un segment de longueur 8 cm et de milieu B. (*C*) est le cercle de centre O, de diamètre [AB].

a) Faire une figure et construire une tangente au cercle (*C*) passant par C. Cette tangente coupe le cercle (*C*) en T. Justifier la construction.

b) Calculer la longueur CT.

c) Montrer que les triangles CBT et CTA sont semblables et calculer le rapport $\frac{TA}{TB}$.

d) (TO) recoupe le cercle (*C*) en T'. La droite (T'B) coupe (CT) en I. Montrer que B est le centre de gravité du triangle CTT'.

e) On mène de I la parallèle à (TT') qui coupe (CT') en J. Montrer que les points T, B et J sont alignés.

23- On considère un cercle fixe de centre O, de rayon R, de diamètre [AB], et une corde variable [CD] telle que (CD) et (AB) soient parallèles (l'arc AC étant plus petit que l'arc AD). La tangente en A au cercle coupe (CD) en E.

a) Comparer les triangles AEC et AED. En déduire la relation : $AE^2 = EC \times ED$.
Pouvait-on prévoir directement cette relation ?

b) La perpendiculaire menée par C à (AD) coupe (AE) en P.
Démontrer que le triangle ACP est isocèle.

c) La perpendiculaire menée de O à (AD) coupe (CD) en I. Démontrer que I est le centre du cercle circonscrit au triangle APD.

d) Démontrer que le quadrilatère OIDB est un parallélogramme. En déduire que le quadrilatère AIDO est un losange. Sur quelle ligne se déplace I lorsque [CD] varie tout en restant parallèle à (AB) ?

24- a) Construire un triangle ABC, isocèle en A, de hauteur [AD], tel que BC = AD = 10.

On complètera la figure à partir du segment [BC] tracé en premier. Justifier la construction.

b) Le cercle de diamètre [BC] recoupe [BA] en F, [CA] en E et coupe [AD] en I.

Quelle est la nature des triangles BFC et BCE?

Démontrer que les droites (BE), (CF) et (AD) sont concourantes en un point H.

c) Justifier que $AC = 5\sqrt{5}$. En exprimant de deux façons différentes l'aire du triangle ABC, démontrer que:

$AD \times BC = BE \times AC$. En déduire la distance BE, puis calculer la distance EC.

d) Exprimer $\tan \hat{B}$ dans les triangles BCE et BDH. Calculer alors la distance HD et démontrer que H est le milieu du segment [DI].

25- Dans un repère orthonormal, d'axes x'Ox et y'Oy, on donne les points A(5, 0) et B(4, 2).

a) Calculer les longueurs AB, OB et OA. En déduire la nature du triangle OAB.

b) Écrire l'équation de la droite (AB). Le point $C\left(\frac{1}{2}, \frac{17}{2}\right)$ est-il situé sur (AB) ?

c) Déterminer l'équation de la parallèle à (AB) passant par O.

d) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis les coordonnées du point E, image de O par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

e) Déterminer les coordonnées du point D, quatrième sommet du parallélogramme OADB. Justifier que B est le milieu de [ED].

26- Dans un plan rapporté à un repère orthonormal, placer les points A(-1 ; -1), E(3 ; 5) et N(6 ; 3).

a) Calculer les coordonnées du milieu U de [AE].

b) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{UN}$.

c) Calculer les coordonnées du point C, symétrique de N par rapport à U.
Quelle est la nature du quadrilatère CANE ?

d) Prouver que le triangle ANE est rectangle. Calculer l'aire du quadrilatère CANE.

e) Quelle est l'image de E par la translation de vecteur $\overrightarrow{NU}$, suivie du vecteur $\overrightarrow{UA}$.

27- Dans un repère orthonormal (O, I, J) on donne les points A(-1, 3), B(-2, 1) et C(1, -3).

a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

b) Calculer les coordonnées du point D, quatrième sommet du parallélogramme ABCD.

c) Calculer les coordonnées du point E, image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

d) Démontrer que C est le milieu de [DE].

e) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

f) Déterminer une équation de la droite (AB).

g) Déterminer une équation de la droite Δ passant par C et perpendiculaire à (AB).

h) Calculer les coordonnées du point H projeté orthogonal de C sur (AB).

i) Calculer la distance du point C à la droite (AB).

j) Calculer l'aire du triangle ABC.

28- Dans un repère orthonormé, placer les points A(2 ; 3), B(-3 ; 1) et C(-1 ; -2).

a) Calculer les coordonnées du point M milieu de [AB].

b) Calculer les coordonnées du point D défini par : $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

c) Soit E l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{MD}$. Calculer les coordonnées de E.
Que peut-on dire du point E ?

29- On considère un parallélogramme ABCD de centre O.

a) Placer le point O' tel que $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$.

b) Les droites (OO') et (BC) se coupent en I. Placer le point J image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$.

c) Démontrer que O est le milieu de [IJ]. En déduire la nature du quadrilatère IBJD.

d) Soit K le milieu de [DC]. Démontrer que $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{O'B}$. En déduire que $\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{O'K} = \vec{0}$.

e) Démontrer que : $\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{JA} = \overrightarrow{BO'}$.

==========