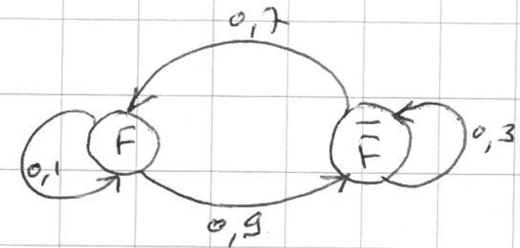
TS (Spécialité)
Correction

Sujet 45 :

1) Le graphe probabiliste est :



La matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$$

2/ a/ $P_1 = (0,2 \quad 0,8)$

b) Calculons :

$$M^2 = \dots = \begin{pmatrix} 0,64 & 0,36 \\ 0,28 & 0,72 \end{pmatrix}$$

On a : $P_3 = P_2 \cdot M = (P_1 \cdot M) \cdot M = P_1 M^2 = \dots = (0,2 \quad 0,8) \times M^2$
$= (0,352 \qquad 0,648)$.

c/ Calculons :

$P_{n+1} = P_n \times M \Rightarrow (a_{n+1} \quad b_{n+1}) = (a_n \quad b_n) \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$

d'où : $a_{n+1} = 0,1 a_n + 0,7 b_n$

or : $b_n + a_n = 1 \Rightarrow \underline{a_{n+1} = -0,6 a_n + 0,7}$

3/ a) $\underline{U_{n+1}} = a_{n+1} - \frac{7}{16} = -0,6a_n + 0,7 - \frac{7}{16} = -0,6\, a_n + \frac{4,2}{16}$
$= -0,6\left(a_n - \frac{4,2}{16} \cdot \frac{1}{0,6}\right) = -0,6\left(a_n - \frac{7}{16}\right)$
$= \underline{-0,6\, U_n}$

$\underline{(U_n) \text{ suite géométrique de raison } -0,6 \text{ et de premier terme } -0,2375}$

b) Comme $U_n = -0,2375 \cdot (-0,6)^{n-1}$

$\Rightarrow a_n = -0,2375 \cdot (-0,6)^{n-1} + \frac{7}{16}$

4) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \frac{7}{16}$ car $\cancel{-0,2375}\,(0,6)^n \to 0$

5) Comme M ne portant aucun 0. L'état P_n à l'étape n converge vers un état P indépendant de P_1.

P l'unique solution de : $P = P \times M$ avec $P = (a \quad b) / a + b = 1$

* $P = P \times M \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,1a + 0,7b \\ b = 0,9a + 0,3b \\ a + b = 1 \end{cases}$ d'où : $\underline{a = \frac{7}{16}}$ et $\underline{b = \frac{9}{16}}$

L'état stable est donc $P = \left(\frac{7}{16} \quad \frac{9}{16}\right)$

Sujet 47 :

Partie A : 1) $A^2 = A \times A = \dots = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2) $\underline{A + 2I} = \dots = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{A^2}$

3) a) $A^3 = A^2 \times A = \dots = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A^2 = A + 2I \iff A^2 - A = 2I \iff A(A-I) = 2I \iff \underline{\frac{1}{2}A(A-I) = I}$

4) on déduit que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A-I) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

Partie B :

1) Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} \iff A \times X = B$

2) On a : $A \times X = B \iff A^{-1}(A \times X) = A^{-1} \cdot B \iff \underline{X = A^{-1} B}$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} & A^{-1} & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Il existe bien un programme de fabrication qui épuise exactement le stock disponible, Ce dernier est défini par 10 produits X_1, 3 produits X_2 et 2 produits X_3.

Sujet 48 :

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ on a : $A \times \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6U_n - V_n \\ U_n + 4V_n \end{pmatrix}$

$$\text{d'où : } \begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix}$$

2) • pour $n=1$

$\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = A^1 \times \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$ vraie

• Hérédité : supp que $\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$ HR

$\begin{pmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = A \times A^n \times \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = A^{n+1} \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$

$$\text{Alors : } \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix}$$

3) a) l'égalité $A = 5I + J \Rightarrow J = A - 5I = \dots = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$A^2 = (J + 5I) \times (J + 5I) = \dots = \begin{pmatrix} 35 & -10 \\ 10 & 15 \end{pmatrix}$

4) Récurrence :

Pour $n = 1 \Rightarrow 1 \cdot 5^{1-1} J + 5^1 I = J + 5I = A = A^1$ vraie pour $n=1$

Hérédité : Supposons que : $A^n = n\,5^{n-1} J + 5^n I$ H.R

$A^{n+1} = A^n \times A = \dots = (n+1) 5^n J + 5^{n+1} I$ car $J^2 = 0$

$$\text{d'où : } A^n = n.5^{n-1} J + 5^n . I$$

5) $\forall n \geq 1$ on a :

$A^n = n.5^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 5^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n.5^{n-1} + 5^n & -n\,5^{n-1} \\ n.5^{n-1} & -n5^{n-1} + 5^n \end{pmatrix}$

on a :

$\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} -n.5^{n-1} \\ -n.5^{n-1} + 5^n \end{pmatrix}$

$$\text{donc : } U_n = -n.5^{n-1} \quad \text{et} \quad V_n = -n.5^{n-1} + 5^n$$