Travail obligatoire en Mathématiques

Pour le passage en Terminale

Les devoirs de vacances proposés sont obligatoires pour certains élèves, et conseillés pour tous les autres, afin de consolider les acquis du travail effectué et faciliter l'adaptation aux exigences et échéances de la classe Terminale.

Ils sont divisés en quatre parties :

- ***Algèbre***
- ***Analyse***
- ***Géométrie***
- ***Probabilités***

Il est souhaitable que ces quatre parties soient travaillées en parallèle et que les chapitres concernés (indiqués au début de chaque partie) soient revus au fur et à mesure de l'avancement du travail !

Bonnes vacances à tous !

NOTIONS A REVOIR

Itinéraire 1 (chap.1) : Suites numériques
Itinéraire 2 (chap.2) : Equations et fonctions polynômes du second degré

Suites numériques

1. a) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 4u_n - 3$ pour tout entier $n > 0$.
Déterminer à l'aide de la calculatrice (en menu suites) les termes u_1 à u_{20}.

b) Les suites suivantes sont-elles arithmétiques ? géométriques ? Justifier.
$u_n = n^3 + 4n$; $v_n = -4n + 3$; $w_n = 2 \times 5^{n+1}$.

c) Etudier les variations des suites ci-dessous, définies pour tout entier naturel.
$u_n = 4n + (-2)^n$; $v_n = 7 \times 1{,}05^n$; $w_n = n^3 + 9n + 1$; $\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = t_n - n^2 \end{cases}$.

2. a) (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = -3$.
- Exprimer u_n en fonction de n puis calculer le 100ème terme de cette suite.
- A partir de quelle valeur n_0 de l'indice a-t-on tous les termes u_n supérieurs à 10 000 ?
- Calculer $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{100}$.
- Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

b) Une suite arithmétique a pour 7e terme le nombre 6 et pour 15e terme le nombre 9. Calculer la raison de la suite et la somme des dix premiers termes.

c) (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 10$ et de premier terme $u_0 = 12$.
- Exprimer u_n en fonction de n puis calculer le 8ème terme de cette suite.
- Calculer $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10}$.
- Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

d) Une suite géométrique est telle que $u_n = 4374$ et le premier terme $u_1 = 2$. Comment choisir l'entier n pour que la somme des n premiers termes soit égale à 6560 ?

3. Pour chacune des suites suivantes, étudier sa nature, son sens de variation et conjecturer sa convergence ; préciser de plus si elle est, ou non, majorée ou minorée :

a) $u_n = n^2 - n$ b) $u_n = \frac{n+2}{n-3}$ c) $u_n = -4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

d) $u_n = 1 - \frac{3}{2}n$ e) $u_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - 3$ f) $u_n = \frac{2^n - 3}{2^n + 1}$

4. Soit la suite (u_n) définie par $u_1 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{n+1}{3n}u_n$. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5, u_6.
On pose $v_n = \frac{u_n}{n}$. Quelle est la nature de (v_n)? Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

5. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

b) A l'aide des droites d'équations $y = \frac{1}{3}x + 2$ et $y = x$, représenter graphiquement les premiers termes de la suite (u_n). Émettre alors une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).

c) On considère la suite auxiliaire (v_n) définie pour tout naturel n par : $v_n = 3 - u_n$.
- Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
- Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
- Calculer la limite de la suite (u_n) et comparer avec la conjecture de la question c).

6. On donne une suite (u_n) définie pour tout naturel non nul n par : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone.

b) Déterminer deux nombres a et b tels que : $u_n = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1}$.

(Réduire au même dénominateur puis procéder par identification)

c) En déduire $S_{99} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{98\times 99} + \frac{1}{99\times 100}$.

d) La suite (S_n) est définie pour tout $n > 0$, par : $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$.
Calculer (S_n) en fonction de n. En déduire la limite de la suite (S_n).

7. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout n, $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$.

a) Calculer les cinq premiers termes de la suite. Illustrer graphiquement. Conjecturer.

b) On définit la suite (v_n) par : $v_n = \frac{1+u_n}{2-2u_n}$.

- Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
- En déduire une expression de v_n puis de u_n.
- Quelle limite peut-on alors conjecturer pour la suite (u_n) ?

8. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{{u_n}^2+1}}$. Calculer les dix premiers termes de la suite.

Conjecturer alors une expression du terme général u_n.

9. On considère deux suites numériques définies pour tout naturel n par :

$$u_n = \frac{3^n - 6n + 4}{3} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{3^n + 6n - 4}{3}$$

a) On pose $a_n = u_n - v_n$. Montrer que (a_n) est une suite arithmétique. Calculer $\sum_{k=0}^{10} a_k$.

b) On pose $b_n = u_n + v_n$. Montrer que (b_n) est une suite géométrique. Calculer $\sum_{k=0}^{10} b_k$.

c) En déduire $\sum_{k=0}^{10} u_k$ et $\sum_{k=0}^{10} v_k$.

10. On a constaté que la population d'un village augmente de 5% chaque année. Ce village compte 5000 habitants au 1/1/2009. En supposant que la population continue à croître chaque année avec le même pourcentage, quel serait le nombre d'habitants au 1er janvier 2020, calculé selon ce modèle ? Au cours de quelle année le nombre d'habitants serait-il devenu supérieur à 14 000 ?

11. En 1998, la population d'une ville est de 100 000 habitants. Chaque année, cette ville voit sa population augmenter de 4%, et 5 000 personnes viennent chaque année s'y établir. On pose u_n la population de cette ville l'année en l'an (1998 + n).

a) Calculer u_0, u_1, u_2, u_3. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

b) Soit la suite (v_n) définie par $v_n = u_n + 125\,000$. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

c) Exprimer alors v_n, puis u_n, en fonction de n.

d) En déduire la population de cette ville en l'an 2022.

12. Une banque propose à un étudiant un prêt de 20 000 € sur une durée comprise entre 1 et 9 ans, au taux de 8% l'an. Deux formules de remboursement sont possibles :

- Contrat A : payer des intérêts chaque année et rembourser le capital la dernière année.
- Contrat B : rembourser capital plus intérêts à la fin de la période de prêt.

Calculer pour chaque contrat la somme totale versée par l'étudiant à la banque pour un prêt d'une durée d'un an; de 2 ans ; ... de 9 ans.

13. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme u_0 et la relation $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

a) Ecrire un programme permettant de calculer un terme d'indice n donné de cette suite.

b) Implémenter cet algorithme (sur calculatrice), puis le tester pour trouver le terme d'indice 17 lorsque $u_0 = -1$.

14. a) Ecrire un algorithme permettant l'affichage des n premiers termes d'une suite arithmétique à partir de la saisie du premier terme u_0, de la raison r et de l'entier n.

b) Ecrire un algorithme permettant l'affichage des n premiers termes d'une suite géométrique à partir de la saisie du premier terme u_0, de la raison q et de l'entier n.

15. a) Faire fonctionner à la main l'algorithme ci-contre.

(Utiliser un tableau et préciser la valeur affichée)

b) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 10$ et la relation $u_{n+1} = 2u_n - 5$. Que représente pour cette suite le nombre n affiché en fin d'algorithme ?

c) Modifier l'algorithme pour obtenir la plus petite valeur n_0 de n telle que $u_n > A$, où A > 10 est un nombre donné, aussi grand que l'on veut.

d) Implémenter ce programme à l'aide de Python (ou sur calculatrice) et déterminer n_0 lorsque A = 1000, 10^6, 10^9, ...

```
n = 0
U = 10
while U<=100 :
    n = n + 1
    U = 2*U - 5
print("n0 = ", n)
```

16. Dans un magasin les livres sont vendus initialement 17 € l'un. Le directeur propose une réduction et a établi un programme permettant le calcul du montant u_n à payer en fonction du nombre n de livres achetés.

a) Tester l'algorithme ci-contre pour quelques valeurs de n.

b) Quelles sont les modalités de la promotion ?

c) Exprimer u_n selon les valeurs de l'entier n.

```
def montant(n):
    if n > 3 :
        M = 17*n*0.92
    else :
        M = 17*n
    return('Montant à payer :', M)
```

17. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1}{3^n}$.

a) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

b) Déterminer un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait : $0 < u_n \leq 10^{-3}$.

c) En s'inspirant de l'exercice précédent, écrire un algorithme donnant le plus petit entier n tel que : $u_n \leq 10^{-90}$. Modifier ensuite cet algorithme pour qu'il donne le plus petit entier n tel que : $u_n \leq 10^{-p}$ pour un entier naturel p quelconque.

Second degré

18. Résoudre :

$a)\ x^2 - 2x - 1 = 0$ $\quad b)\ 5x^2 + x + 4 = 0$ $\quad c)\ 2x^2 - 20x + 50 = 0$

$d)\ \dfrac{9}{x} - \dfrac{x}{3} = 2$ $\quad e)\ x + \dfrac{1}{x-3} = 5$ $\quad f)\ \dfrac{5x^2 + 8x - 13}{x - 7} = 0$

$g)\ 2x^4 + x^2 - 6 = 0$ $\quad h)\ x^4 - 8x^2 + 12 = 0$ $\quad i)\ x^4 + 8x^2 + 12 = 0$

$j)\ x^3 - x^2 - 6x = 0$ $\quad k)\ (x^2 - 5x - 14)(9x^2 + 9x - 10) = 0$

$l)\ x^2 - 8x + 7 \geq 0$ $\quad m)\ 5x^2 + 2x - 3 < 0$ $\quad n)\ 2x^2 + 16x + 32 > 0$

$o)\ \dfrac{5x^2 + 18x + 13}{x - 7} \leq 0$ $\quad p)\ x(2x - 1) < 3(5 + 2x)$ $\quad q)\ \dfrac{2 - x}{x + 1} \geq \dfrac{x + 1}{2 - x}$

$r)\ \begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$ $\quad s)\ \begin{cases} x^2 - 8x + 7 \geq 0 \\ (x + 2)(x - 3) \leq 0 \end{cases}$

19. a) Déterminer le réel c tel que le réel 3 soit solution de l'équation $-x^2 + 7x + c = 0$. Trouver l'autre solution.

b) Déterminer le réel a tel que l'équation $ax^2 + 3x + 9 = 0$ n'admette qu'une solution. Quelle est cette solution ?

c) Déterminer tous les réels a tels que l'équation $ax^2 + 13x + 1 = 0$ admette deux solutions réelles distinctes.

d) Montrer que quel que soit le réel b, l'équation $6x^2 + bx - 1 = 0$ admet toujours deux solutions distinctes.

e) Déterminer tous les réels c tels que l'équation $-x^2 + x + c = 0$ n'ait pas de solution.

20. a) Déterminer la forme canonique des polynômes de second degré suivants :

- $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$;
- $f(x) = -x^2 + 8x - 10$;
- $f(x) = 2x^2 - 6x$.

b) Factoriser, lorsque cela est possible, les polynômes de second degré suivants :

- $f(x) = 3x^2 + 11x - 4$;
- $f(x) = 4x^2 - 24x + 36$;
- $f(x) = 7x^2 - 9x + 5$.

21. Dans le plan rapporté à un repère, on considère la parabole (P) représentant la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.
a) Déterminer la forme canonique de $f(x)$ et en déduire les coordonnées du sommet de (P).
b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la parabole (P) avec l'axe des abscisses.
c) Etudier la position de (P) par rapport à l'axe des abscisses.

22. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de la fonction f polynôme du second degré représenté par la parabole (P) :
a) (P) a pour sommet S (- 1 ; - 2) et passe par le point A (2 ; 20).
b) (P) coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 5 et passe par le point C (2 ; - 18).

23. Soit la parabole (P) d'équation $y = -2x^2 + x + 2$ et la droite (d) d'équation $y = -x - 10$.
a) Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de (P) et (d).
b) Déterminer par le calcul la position relative de la parabole (P) et de la droite (d).
c) Sur l'écran de la calculatrice, tracer (P) et (d) et vérifier graphiquement les résultats précédents.

24. Soit (P) et (P') les paraboles d'équations respectives : $y = x^2 + 2x$ et $y = -2x^2 - 3x + 2$.
a) Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de ces deux courbes.
b) Déterminer par le calcul la position relative des courbes (P) et (P') selon les valeurs de x.
c) Sur l'écran de la calculatrice, tracer (P) et (P') et vérifier graphiquement les résultats précédents.

25. Une personne place à un certain taux d'intérêt un capital de 8 000 €. Après un an, elle place le capital et les intérêts produits à un taux supérieur de 1 % au premier taux : les intérêts annuels produits sont alors de 416 €. Déterminer le taux initial.

26. Un capital de 10 000 € est placé au taux de t % pendant un an. L'intérêt est capitalisé et le nouveau capital est placé l'année suivante au taux de $(t + 1)$ %. En fin de deuxième année, le capital s'élève à 11 130 €. Calculer t.

27. Une entreprise veut, avant commercialisation, étudier et déterminer le prix en euros d'un nouveau produit. On note x le prix de vente unitaire de ce produit, x variant entre 6 et 20 euros.
La demande pour ce produit est donnée en fonction du prix de vente par la fonction f définie sur [6 ; 20] par : $f(x) = -x^2 + 30x + 17$.
L'offre est donnée en fonction du prix de vente par la fonction g définie sur [6 ; 20] par : $g(x) = 8x + 102$.
Déterminer le prix d'équilibre, c'est-à-dire le prix pour lequel l'offre est égale à la demande.

28. Une entreprise produit des téléviseurs 3D.
Le coût de production $C(n)$, exprimé en milliers d'euros pour n articles, est donné par la fonction C avec : $C(n) = 0{,}02n^2 - 2n + 98$ pour $n \in [50; 150]$.
a) Chaque article étant vendu 1 500 €, calculer le montant $V(n)$, exprimé en milliers d'euros, pour la vente de n articles.
b) On note $B(n)$ le bénéfice pour n articles vendus. Exprimer $B(n)$ en fonction de n.
c) Déterminer l'intervalle des valeurs de n pour lesquelles la production est rentable.

NOTIONS A REVOIR

Limites, Dérivation, Variations & Courbes représentatives

29. Pour chacune des fonctions définies ci-dessous :

- Déterminer son domaine de définition D_f ;
- Calculer les limites aux bornes de D_f ;
- Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de la fonction f ;
- Dresser un tableau de variations complet de la fonction ;
- Construire sa courbe représentative C_f dans un repère convenable.

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ b) $f(x) = (x-2)^2(x+1)$ c) $f(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 1}$ e) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{3x^2 - 4x}$ f) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 6x + 9}$

g) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 8}{x^2 - 3x + 2}$ h) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ i) $f(x) = x - 2 - \dfrac{1}{x+1}$

30. a) Étudier les variations puis construire la courbe représentative (C) de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1}$$

b) Résoudre graphiquement l'équation : $(2-m)x^2 + (m+1)x - (m+1) = 0$, en discutant selon les valeurs du paramètre réel m. *→ On remarquera d'abord que cette équation s'écrit $f(x) = m$.*

31. Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 8.$$

a) Etudier les variations de f et tracer sa courbe (C).
b) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse (-2). Etudier les positions relatives de (C) et (T).
c) Déterminer les abscisses des points de (C), s'ils existent, pour lesquels la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x - 5$.
d) Déterminer les abscisses des points de (C), s'ils existent, pour lesquels le coefficient directeur de la tangente est égal à (– 3).

32. a) On donne le polynôme : $P(x) = 3x^2 - 6x + 5$. Montrer que P(x) est toujours strictement positif.
b) Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 5.$$

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [1\ ;\ 2]$.
d) Donner un encadrement de α à 0,001 près.
e) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas d'autres solutions.

33. a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3.$$

b) Préciser ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire le tableau complet des variations de f (sens de variation, extremums et limites).

c) Étudier, en discutant suivant les valeurs du paramètre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

34. Soit une fonction f définie sur l'intervalle]0 ;+∞[par : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x}$, où a, b et c sont des nombres réels. On donne le tableau des variations de f :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$

a) Soit f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle]0 ;+∞[. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, c et x.

b) En utilisant les valeurs de $f(2)$, de $f'(2)$ fournies par le tableau et sachant que $f(1) = -4$, montrer que les nombres réels a, b et c sont solutions du système :

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -6 \\ 4a - c = 0 \\ a + b + c = -4 \end{cases}$$

Déterminer alors les nombres réels a, b et c, puis en déduire l'expression de $f(x)$.

35. Le coût total de production d'un bien est donné par :

$$C(q) = q^3 - 12q^3 + 72q$$

pour q élément de [0 ; 8].
Pour toute quantité q produite, on assimile le coût marginal à la dérivée du coût total : $C_m(q) = C'(q)$.

a) Exprimer le coût marginal en fonction de q et vérifier que $C'(q) = 3(q-4)^2 + 24$.
Etudier les variations du coût marginal, puis le signe de $C'(q)$ pour q∈[0 ; 8].
En déduire que la fonction du coût total est strictement croissante sur [0 ; 8].

b) On note $C_M(q)$ le coût moyen d'une quantité q produite. Exprimer le coût moyen en fonction de q puis étudier ses variations.

c) Dresser les tableaux des variations des fonctions C' et C_M sur [0 ; 8].
Résoudre l'équation : $3q^2 - 24q + 72 = q^2 - 12q + 72$.
Dans le même repère orthogonal d'unités 1cm en abscisses et 1cm pour 5 en ordonnées, tracer la courbe (C') représentant le coût marginal et la courbe Γ représentant le coût moyen. (On fera apparaître la résolution de l'équation précédente, ainsi que les tangentes horizontales à (C') ou à (Γ).

d) Déterminer graphiquement les quantités pour lesquels le coût marginal est supérieur au coût moyen.
Montrer que $C_M(q) = C'(q)$ lorsque $C'_M(q) = 0$. *On utilisera la dérivée du coût total, sachant que $C(q) = q \times C_M(q)$*

36. Une entreprise produit des crayons de couleur. Lorsque la quantité q (exprimée en milliers) est comprise entre 4 et 10, on admet que le coût de production journalier (exprimé en euros) est donné par $C(q) = q^3 - 48q + 600$.
Le prix de vente de chaque millier de crayons est de 99 €.

a) Exprimer la recette pour la vente de q milliers de crayons.

b) Montrer que le bénéfice journalier $B(q)$, exprimé en euros, est donné par :

$$B(q) = -q^3 + 147q - 600$$

avec q appartenant à [4 ; 10].

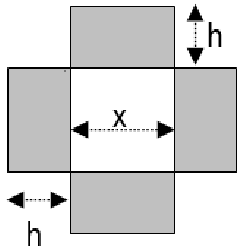
c) Etudier les variations de la fonction B sur l'intervalle [4 ; 10].
En déduire le nombre de milliers de crayons à produire quotidiennement pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice maximal ?

37. On admet que lorsque la vitesse v d'une voiture est comprise entre 20 et 130 km.h^{-1}, la consommation d'essence en fonction de v est donnée par l'expression :

$$C(v) = 0{,}06v + \frac{150}{v}$$

a) Etudier le sens de variation de cette fonction C sur [20 ; 130].
b) A quelle vitesse faut-il rouler pour que la consommation soit minimale ? quelle est alors cette consommation minimale ?

38. Une boîte en carton, sans couvercle, a le patron ci-contre. Sa base carrée a pour côté x et pour hauteur h (en cm).



a) Déterminer l'aire du patron en fonction de x et de h. Exprimer le volume de la boîte en fonction de x et h.
b) On suppose que la boîte a un volume de 500 cm^3. Exprimer alors h en fonction de x et en déduire l'expression de l'aire A(x) en fonction de x.
c) Étudier les variations de la fonction A sur l'intervalle]0 ; +∞[. En déduire le côté x pour lequel l'aire du patron est minimale.
d) Si le carton coûte 20 € le m², calculer le prix minimal de cette boîte.

39. La population d'une ville nouvelle est donnée par : $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$, où t est le temps écoulé depuis 1990 (exprimé en années) et $f(t)$ est le nombre d'habitants (exprimé en milliers).
a) Calculer la population de cette ville début 2000, puis début 2012.
b) Calculer $f'(t)$, où f' désigne la dérivée de f.
En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle [0 ; +∞[et en donner une interprétation concrète.
c) La dérivée de la fonction f représente le rythme de croissance de la population de cette ville (exprimé en milliers d'habitants par an). Calculer le rythme de croissance en 2010 pour cette ville.
Calculer le rythme de croissance que l'on pouvait prévoir en 2020.
Déterminer à quel moment le rythme de croissance sera égal à 0,125 milliers (ou 125 habitants, de plus par an).

40. On dispose d'un récipient cylindrique de rayon 20 cm contenant de l'eau dont la hauteur est 10cm.
On y plonge une bille sphérique de diamètre d et on constate que le niveau de l'eau est tangent à la bille.
Le but du problème est de calculer le diamètre de la bille.
a) Démontrer que la résolution du problème est équivalente à la résolution du système:

$$\begin{cases} 0 < d < 40 \\ d^3 - 2\,400\,\mathrm{d} + 24\,000 = 0 \end{cases}$$

b) On pose $f(d) = d^3 - 2\,400d + 24\,000$.
Etudier les variations de f et montrer que l'équation $f(d) = 0$ a une solution et une seule.
c) A l'aide d'un algorithme au choix (utilisant la méthode par dichotomie ou la méthode de Newton), donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de la solution *(Vérifier ensuite avec le solveur graphique de la calculatrice)* et conclure.

Fonction exponentielle

41. Ecrire les expressions suivantes sous la forme $e^{A(x)}$ où $A(x)$ est une expression de la variable x :

$a)\ e^{5x+2} \times e^{x-5}$; $\quad b)\ \dfrac{e^{x^2+2}}{e^{x+2}}$; $\quad c)\ (e^{2x+7})^2 \times (e^{1-x})^3$; $\quad d)\ \dfrac{e^{2-x} \times (e^{2x+1})^3}{e^{-x-1} \times e^{2x}}$.

42. Démontrer les égalités suivantes, pour tout réel x :

$a)\ \dfrac{1+e^{2x}}{1+e^x} = \dfrac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}+1}$; $\quad b)\ \dfrac{e^{1+2x}}{1+e^{2x}} = \dfrac{e^{1+x}}{e^{-x}+e^x}$; $\quad c)\ 1 - \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

43. Déterminer le signe des expressions données :

$A(x) = 1 + 5e^{-17x}$; $\quad B(x) = -2e^{-x-1}$; $\quad C(x) = e^x - 2xe^x$

$D(x) = x^2e^x - e^{x+2}$; $\quad E(x) = xe^x - e^{x+1}$; $\quad F(x) = \dfrac{e^x - xe^x}{e^x + 1}$

44. Parmi les équations suivantes, lesquelles n'ont pas de solution dans $\mathbb{R}$? Justifier.
a) $e^x = 0$; b) $e^{x+1} = -1$; c) $e^x + 1 = 0$; d) $e^x - 1 = 0$.

45. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $e^{2x} = e^5$; b) $e^x = e$; c) $e^x = e^{-x}$; d) $e^x = 1$; e) $e^{2-x} = 1$
f) $e^{x^2} = e^x$; g) $e^{5x+1} = e \times e^{2x}$; h) $(e^x - e^2)(e^{-x} + 5) = 0$; i) $e^{5x} = \frac{e^{-x}}{e}$

46. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
c) $e^{x+1} \leq e^5$; b) $e^{3-x} > e^2$; c) $1 - e^{x^2-1} \geq 0$; d) $e^{x+3} \geq \frac{1}{e}$

47. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $e^{2x} + 6e^x - 7 = 0$ *Piste : Poser $X = e^x$*
b) $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$ *Piste : Montrer d'abord que l'équation s'écrit* $(e^x)^2 + e^x - 2 = 0$

48. a) Justifier que $e^{2x} - e^x$ est du signe de $e^x - 1$.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x - 1 \geq 0$, puis en déduire le signe de $e^{2x} - e^x$ sur $\mathbb{R}$.

49. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{-x} - e^x > 0$.
b) En déduire le signe de $1 - \frac{1+e^x}{1+e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$.

50. a) Démontrer que pour tout réel x, $-2e^{2x} + e^x + 1 = (2e^x + 1)(1 - e^x)$.
b) En déduire le signe de $-2e^{2x} + e^x + 1$ sur $\mathbb{R}$.

51. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (5 - x)e^x$.
a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
b) Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe et construire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
c) Tracer à l'aide de la calculatrice la courbe représentative de f.

52. Reprendre les questions de l'exercice précédent avec les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = xe^x - 1 \qquad \text{et} \qquad h(x) = (e^x + 1)(e^x - 3)$$

53. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2}{2e^x}$.
Démontrer que $f'(x)$ est du signe de $2x - x^2$, puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

54. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x-2}{e^x}$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère.
a) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
b) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 3.

55. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{x^2-3}$.
a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $x^2 - 2x - 3$.
b) En déduire le tableau de variation de f sur [2 ; 10].

56. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + 2x)e^{3x}$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère.
a) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
b) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.
c) Etudier la position relative de C_f par rapport à l'axe des abscisses.

57. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = e^{n+1}$.
Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

58. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-0,8x}$ et (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.
Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique et préciser sa raison

59.

Afin de pratiquer une scintigraphie, on injecte, au temps $t = 0$, un échantillon d'iode 123 dans le corps d'un patient.

L'activité de l'iode 123, exprimée en becquerels (Bq) en fonction du temps t (exprimé en heures) est donnée par : $A(t) = 2\,500e^{-0{,}053t}$ ($t \geqslant 0$).

1. Montrer que, pour tout réel t positif :

$$e^{-0{,}053(t+13)} = e^{-0{,}053t} \times e^{-0{,}689}$$

2. En déduire que pour tout réel t positif,

$$\frac{A(t+13)}{A(t)} = e^{-0{,}689}.$$

3. Donner une valeur approchée à 0,01 près de $e^{-0{,}689}$. Pourquoi peut-on affirmer que toutes les treize heures, l'activité de l'iode 123 est divisée par deux ?

LE SAVIEZ-VOUS

La scintigraphie est une méthode d'imagerie médicale qui produit une image par l'administration d'un médicament dont on détecte les rayonnements qu'il émet.

60.

On procède, chez un sportif, à l'injection intramusculaire d'un produit. Celui-ci se diffuse progressivement dans le sang. On admet que la concentration de ce produit dans le sang, exprimée en $mg \cdot L^{-1}$ (milligrammes par litre) peut être modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 12] par $g(t) = 6te^{-t}$ où t est le temps exprimé en heures.

1. a. Calculer $g'(t)$.

b. Justifier que $g'(t)$ est du signe de $(6 - 6t)$ et en déduire le signe de $g'(t)$ sur [0 ; 12].

c. Construire le tableau de variation de la fonction g sur [0 ; 12].

2. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de la concentration maximale du médicament dans le sang.

3. Le produit fait l'objet d'une réglementation par la fédération sportive. Pour ne pas être en infraction, la concentration dans le sang de ce produit, au moment du contrôle, doit être inférieure à 0,05 $mg \cdot L^{-1}$.

a. Compléter l'algorithme ci-dessous pour que la variable t contienne à la fin de son exécution le nombre de minutes qu'il faut attendre après l'injection pour que le sportif soit à nouveau en règle avec la législation.

```
t ← 60
y ← 2,2
Tant que ..........
    t ← t + 1
    y ← ..........
Fin Tant que
```

b. Déterminer, par la méthode de votre choix et en expliquant la façon de procéder, le nombre de minutes qu'il faut attendre après l'injection pour que le sportif soit à nouveau en règle avec la législation.

61.

CALC Une brioche qui était dans une étuve à 30 °C est placée dans un four chauffé à 180 °C pendant 35 minutes.

La température au cœur de la brioche, exprimée en degrés Celsius, est donnée sur l'intervalle [0 ; 35] par une fonction du temps t, exprimé en minutes, de la forme $f(t) = ae^{-0{,}022t} + 180$.

1. Sachant que $f(0) = 30$, calculer la valeur de a.

2. a. Justifier que $f'(t) = 3{,}3e^{-0{,}022t}$ pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 35].

b. En déduire les variations de f sur [0 ; 35].

c. Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.

3. À l'aide d'une calculatrice, déterminer le temps nécessaire, en minutes, pour que la température au cœur de la brioche soit supérieure à 100 °C.

62.

On s'intéresse à la croissance d'une ville depuis le 1er janvier 2019. On modélise l'évolution de sa population par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2e^{-0{,}05x}}$ où $f(x)$ est le nombre d'habitants, en centaines de milliers, au 1er janvier de l'année $2019 + x$.

1. Quel est le nombre d'habitants en 2019 ?

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$.

b. Déterminer le sens de variation de f.

3. a. Tracer dans un repère orthogonal la courbe représentative de f (on prendra comme unités graphiques : 0,1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées).

b. Par lecture graphique, déterminer à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure à 200 000 habitants.

63.

PROG Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 0{,}5e^{0{,}173x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f.

2. Montrer que pour tous réels x et T, $f(x + T) = e^{0{,}173T}f(x)$.

3. On souhaite déterminer le nombre réel T tel que pour tout réel x, $f(x + T) = 2f(x)$.

a. Justifier que $f(T) = 2f(0)$.

b. Recopier et compléter le programme ci-dessous afin que la fonction T_exp retourne une valeur approchée à 0,01 près du réel T.

```python
from math import*
def T_exp():
    T=0
    y=0.5
    while ...:
        T=T+0.01
        y=0.5*exp(0.173*T)
    return (...)
```

c. Quelle valeur est affichée par le programme ?

d. En utilisant ce résultat, construire la courbe $\mathscr{C}_f$ sur [0 ; 16].

Fonctions trigonométriques

64. Compléter le tableau ci-dessous :

Mesure en degrés		75°		120°	
Mesure en radians	$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{4\pi}{9}$		$\frac{5\pi}{4}$

65. Sur le cercle trigonométrique, placer les points images de chacun des réels suivants, puis comparer les cosinus et sinus de ces réels :

a) $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$; $\quad$ $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$; $\quad$ $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$;

b) $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$; $\quad$ $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$; $\quad$ $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$

66. Calculer le cosinus et le sinus de chacun des réels suivants sans calculatrice, en se ramenant à des valeurs remarquables :

$a)\ \frac{17\pi}{4}$; $\quad$ $b)\ \frac{13\pi}{6}$; $\quad$ $c)\ -\frac{121\pi}{6}$; $\quad$ $d)\ \frac{15\pi}{4}$.

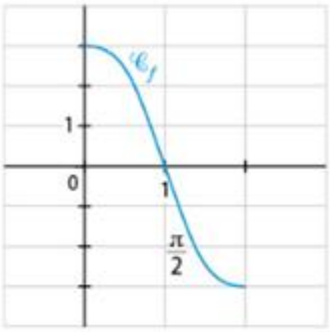
67. Résoudre les équations trigonométriques suivantes, dans l'intervalle I indiqué :

a) $\cos x = \frac{1}{2}$; $\quad \mathrm{I} = [0\,;2\pi]$ $\qquad$ b) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\quad \mathrm{I} = [-\pi\,;\pi]$

c) $\sin x = \frac{1}{2}$; $\quad \mathrm{I} = [0\,;2\pi]$ $\qquad$ d) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\quad \mathrm{I} = [-\pi\,;\pi]$

68.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos(x)$. On a tracé ci-contre sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.



1. Reproduire la courbe.

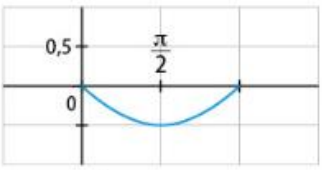
2. Calculer $f(-x)$ et en déduire une propriété graphique de $\mathscr{C}_f$. Compléter alors $\mathscr{C}_f$ sur $[-\pi\,;0]$.

3. Calculer $f(x+2\pi)$ et en déduire une propriété graphique de $\mathscr{C}_f$. Compléter alors $\mathscr{C}_f$ sur $[\pi\,;3\pi]$.

69.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}\sin(x)$.

On a tracé ci-contre sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.



1. Reproduire cette courbe.

2. Calculer $f(-x)$ et en déduire une propriété graphique sur $\mathscr{C}_f$. Compléter alors $\mathscr{C}_f$ sur $[-\pi\,;0]$.

3. Calculer $f(x+2\pi)$ et en déduire une propriété graphique sur $\mathscr{C}_f$. Compléter alors $\mathscr{C}_f$ sur $[-3\pi\,;3\pi]$.

70.

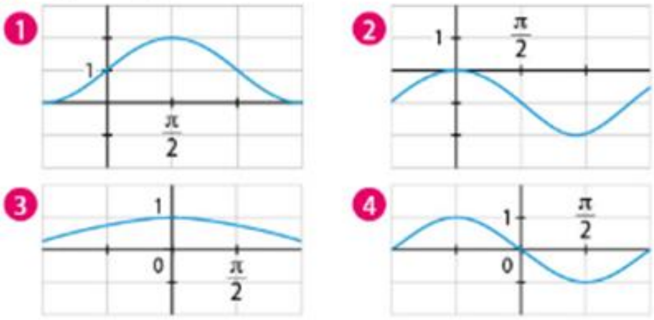
Associer chacune des quatre fonctions suivantes à une des courbes représentatives proposées :

a. $f(x) = 1 + \sin(x)$

b. $g(x) = \frac{1}{2}(\cos(x)+1)$

c. $h(x) = -\sin(x)$

d. $k(x) = \cos(x) - 1$



Parmi ces fonctions définies sur $\mathbb{R}$, lesquelles sont paires ? lesquelles sont impaires ?

71.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1. Pour tout réel x, $\cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) + 1$.

2. Pour tout réel x, $\cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$.

3. Pour tout réel x, $\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi}{n}\right) = 0$.

4. Pour tout réel x, $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$.

5. $\cos\left(\dfrac{100\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

6. Pour tout réel x, $\cos(2020\pi - x) + \cos(x + 1000\pi) = 0$.

72.

1. Donner un encadrement de $\cos(x)$ pour tout réel x.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3 + 2\cos(x)}{5}$.

a. Montrer que $f(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.
b. Résoudre l'équation $f(x) = 1$ pour x dans l'intervalle $[0\,;2\pi[$. (On pourra s'aider d'un cercle trigonométrique.)
c. En déduire les solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$.

3. Montrer qu'il existe un unique réel de l'intervalle $[0\,;\pi]$ tel que $f(x) = \dfrac{4}{5}$. Le déterminer.

4. a. Montrer que la fonction f est périodique de période 2π. Comment cela se traduit-il sur la représentation graphique de f ?
b. Étudier la parité de f. Quelle conséquence géométrique peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ?

5. À l'aide de la calculatrice et des résultats des questions précédentes, tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi\,;2\pi]$.

73.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\ \vec{j})$.

1. a. Montrer que la fonction f est paire.
b. Que peut-on en déduire pour sa représentation graphique ?

2. Montrer que la fonction f est périodique de période 2π.

3. Expliquer comment on peut obtenir la représentation graphique de f sur $[\pi\,;3\pi]$ et sur $[-3\pi\,;3\pi]$ à partir de la représentation graphique de f sur $[-\pi\,;\pi]$.

4. Représenter $\mathscr{C}_f$ sur $[-3\pi\,;3\pi]$ à l'aide d'une calculatrice.

5. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ dans l'intervalle $[-3\pi\,;3\pi]$.

6. a. Montrer qu'il existe deux réels de l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tels que $\sin^2(x) = 1$.
Donner ces réels.
b. En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 1$ pour x appartenant à $[-\pi\,;\pi]$.
c. En utilisant la question **3.**, en déduire les solutions de l'équation $f(x) = 1$ sur l'intervalle $[-3\pi\,;3\pi]$.

NOTIONS A REVOIR

Itinéraire 9	(chap.10) :	Calcul vectoriel et produit scalaire
Itinéraire 10	(chap.11) :	Géométrie repérée

74. a) Le triangle ABC est tel AB = 9, AC = 4 et $\hat{A} = 60°$. Calculer BC.

b) Le triangle DEF est tel DF = 6, $\hat{E} = 30°$ et $\hat{F} = 75°$.
Calculer DE (en donner la valeur exacte puis l'arrondi à 0,1 près).

75. a) Le triangle ABC est tel AB = $\sqrt{6}$, BC = 3 et $\hat{A} = 60°$.
Calculer la valeur exacte de l'angle $\hat{C}$, puis en déduire celle de l'angle $\hat{B}$.

b) Le triangle DEF est tel DE = 5, DF = 6 et EF = 8.
- Calculer $\cos \widehat{D}$, puis une mesure de $\widehat{D}$ au degré près.
- Donner la valeur exacte de $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$.

76. a) ABCD est un parallélogramme tel que AB = 4, AD = 5 et AC = 7.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

b) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points A(0; 1), B(-1, -6), C(13, -8) et D(-8, -5).
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$. Que peut-on en déduire ?

c) ABCD est un rectangle de centre O tel que AB = 4 et AD = 3.
Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{CB}$.

d) Sachant que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot c$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA} \cdot 2\overrightarrow{AC}$ et $3\overrightarrow{AB} \cdot 4\overrightarrow{AC}$.

77. a) ABC est un triangle tel que AB = 6, BC = 5 et AC = 9.
- Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, puis en déduire la valeur de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- On note E le point tel que ABEC est un parallélogramme. Déterminer une valeur approchée de la longueur de la diagonale [AE].

b) ABC est un triangle, I est le milieu du côté [BC] avec de plus BC = 8 et IA = 5. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

c) Soit trois points A, B et C, tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -4$. Calculer la longueur du segment [AB].

78. a) ABC est un triangle tel que AB = 4, AC = 5 et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.
- Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et en déduire $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$.
- L'angle $\widehat{ACB}$ est-il aigu ou obtus ?

b) ABCD est un carré de côté 4. On note I le milieu de [AD].
- Calculer $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$.
- En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{BIC}$.

c) ABCD est un parallélogramme tel que AB = 5, AD = 7 et BD = 6. Calculer la longueur AC.

79. ABCD est un carré de côté 1. On construit les points E et F tels que $\overrightarrow{CE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.
Démontrer que les droites (AF) et (BE) sont perpendiculaires :
- Par un calcul vectoriel.
- Par un calcul analytique après avoir défini un repère de la figure.

80. a) Soit deux points A et B. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$?

b) On donne deux points A et B tels que AB = 8.

- Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -6$.
- Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 9$.

c) Soit un triangle ABC. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM}$.

Dans les exercices qui suivent, le plan est rapporté à un repère orthonormé.

81. a) Donner une équation de la droite (d) passant par $A(-3\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

b) Donner une équation de la droite (d) passant par $A(-8\,;-4)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-6\\9\end{pmatrix}$.

c) Donner une équation de la droite (d) passant par $A\left(\frac{7}{4}\,;\frac{8}{5}\right)$ et parallèle à $(\Delta)\colon \frac{4}{5}x - \frac{5}{7}y + \frac{3}{8} = 0$.

d) Donner une équation de la droite (d) passant par $A(1\,;0)$ et perpendiculaire à $(\Delta)\colon -7x + 5y - 3 = 0$.

e) On considère les points $A(0\,;3)$ et $B(4\,;1)$. Donner une équation de la médiatrice de [AB].

82. a) Donner une équation de la droite (d) de vecteur normal $\vec{n}(2,-1)$ passant par le point A$\left(-5,\frac{1}{2}\right)$.

b) On donne les points A(1 ; 2) et B(– 1 ; 4).

- Déterminer une équation de la perpendiculaire en A à la droite (AB).
- Déterminer une équation de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par l'origine O.
- Déterminer une équation de la médiatrice de [AB].

83. a) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point O sur la droite (d) : $-5x + y - 3 = 0$.

b) On considère les points $A(-2\,;4)$ et $B(1\,;2)$.M est un point qui se projette orthogonalement sur (AB) en B. Montrer que M peut avoir pour coordonnées $(-1\,;\,-1)$.

c) On considère les points $A(-4\,;3)$ et $B(5\,;-2)$.
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $C(2\,;3)$ sur la droite (AB).

84. On considère la parabole (P) d'équation : $y = -10x^2 + 3x - 1$.
Déterminer le sommet S de la parabole et son axe de symétrie (Δ), puis construire (P).

85. a) Ecrire une équation du cercle de centre C(– 1 ; 1) et de rayon $\sqrt{2}$. Passe-t-il par l'origine du repère ?

b) Ecrire une équation du cercle de centre I(– 1 ; 3) et passant par M(1, 1). Passe-t-il par l'origine du repère ?

c) Ecrire une équation du cercle de diamètre [AB] avec A(4 ; 5) et B(– 2 ; 7).

d) Déterminer l'ensemble (E_1) des points $M(x;\ y)$ vérifiant l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 6 = 0$.

e) Déterminer l'ensemble (E_2) des points $M(x;\ y)$ vérifiant l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 19 = 0$.

86. A et B sont deux points du plan tels que $AB = 4$. On considère le cercle (C) de centre A et de rayon 3 et le cercle (C') de centre B et de rayon 2. On note I et J les points d'intersection des deux cercles.

a) Faire une figure, puis déterminer une équation du cercle (C) et une équation du cercle (C') dans un repère d'origine A judicieusement choisi.

b) Déterminer les coordonnées de I et J. En déduire que la droite [AB] est la médiatrice du segment [IJ].

87. (C) est le cercle de centre Ω(2 ; – 1) et de rayon r = 5.

a) Vérifier que M(– 1 ; 3) appartient à (C).

b) Déterminer une équation de la tangente en M à (C).

88. a) Déterminer une équation du cercle de centre Ω(– 8 ; 6) et de rayon r = 10.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle (C) avec les axes de coordonnées.

c) Déterminer une équation des tangentes au cercle en ces points d'intersection.

Partie IV - PROBABILITÉS

NOTIONS A REVOIR

Itinéraire 3	(chap.9) :	Probabilités conditionnelles et indépendance
Itinéraire 7	(chap.10) :	Variables aléatoires réelles

89. On désigne par A, B, C, D, E, F, six événements d'un univers Ω. Les questions suivantes sont indépendantes.

a) On suppose que A et B sont incompatibles (disjoints) et que p(A) = 0,25 et p(B) = 0,45. Calculer $p(A\cap B)$; $p(A\cup B)$ et $p(\overline{A})$.

b) On suppose que p(C) = 0,2 ; $p(\overline{D})$ = 0,4 et $p(C\cup D)$ = 0,5. Les deux événements C et D sont-ils incompatibles ? Calculer $p(C\cap D)$.

c) On suppose que p(E) = 0,3 ; p(F) = 0,5 et $p(E\cap F)$ = 0,1. Calculer $p\left(\overline{E\cup F}\right)$.

90. Un examen comportant deux épreuves vient d'avoir lieu. On appelle N_1 la note obtenue à la première épreuve et N_2 celle obtenue à la deuxième.
Un étudiant est reçu à l'examen si, à chacune des deux épreuves, sa note est supérieure ou égale à 10.
Le tableau ci-dessous donne une répartition des notes des 350 étudiants qui ont subi les deux épreuves.

	$N_1 < 10$	$10 \leq N_1 < 12$	$N_1 \geq 12$	Total
$N_2 < 10$	70			210
$N_2 \geq 10$				
Total	140			350

On sait, de plus, que :
- pour 20% des étudiants, $N_1 \geq 12$;
- parmi les étudiants pour lesquels $N_1 \geq 12$, il y en a 80% pour lesquels $N_2 \geq 12$.

a) Recopier et compéter le tableau précédent. On expliquera seulement pourquoi il y a 56 étudiants pour lesquels $N_1 \geq 12$ et $N_2 \geq 10$.

b) On décide de choisir au hasard un étudiant parmi les 350 qui ont subi les deux épreuves de l'examen.
A l'aide du tableau, donner les probabilités des événements suivants :
A : « les deux notes sont strictement inférieures à 10 » ;
B : « la note à la deuxième épreuve est strictement inférieure à 10, sachant que la note à la première épreuve est strictement inférieure à 10 ».
C : « l'étudiant est reçu à l'examen ».

91. Les résultats au bac d'une certaine année précédant la réforme du bac, sont consignés dans le tableau suivant :

	Effectifs des reçus	Effectifs des filles reçues	Taux de réussite
Bac L	47 765	37 878	87,1 %
Bac ES	90 466	56 994	88,5 %
Bac S	148 531	69 810	89,6 %
Total	286 762	164 682	88,8 %

a) On édite le diplôme d'un bachelier (fille ou garçon) de la session 2010. Quelle est la probabilité pour que ce soit celui d'un bachelier scientifique ?

b) On édite le diplôme d'un bachelier de la session 2010 de la série ES. Quelle est la probabilité pour que ce soit celui d'une bachelière ?

c) On édite le diplôme d'une bachelière de la session 2010. Quelle est la probabilité pour que ce soit celui d'une bachelière de la série L ?

92. Page 256 nos 25-26 QCM Une seule réponse exacte

On considère un tableau indiquant la répartition des issues d'une expérience aléatoire. A, B, C et D sont des événements. De plus, B, C et D forment une partition de l'univers associé à cette expérience.

	B	C	D
A	100	50	50
$\bar{A}$	50	130	20

25 **a.** $P_{\bar{A}}(C) = \frac{13}{7}$ **b.** $P(A \text{ et } B) = \frac{1}{6}$ **c.** $P(\bar{A} \text{ et } B) = \frac{1}{8}$

26 **a.** $P_B(A) = \frac{2}{3}$ **b.** $P_A(B) = \frac{1}{5}$ **c.** $P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{3}$

93. Page 264 no 103 **Audimat**

Un groupe de lecteurs de la presse écrite a été interrogé. 30 % lisent la presse tous les jours, les autres ne la lisent qu'occasionnellement. Parmi les lecteurs occasionnels, 40 % lisent la presse régionale, les autres lisent la presse nationale. Parmi les lecteurs réguliers, 55 % lisent la presse nationale et 45 % lisent la presse régionale. On rencontre au hasard un de ces lecteurs.

1. Construire un arbre pondéré en lien avec cette situation.

2. Quelle est la probabilité que la personne rencontrée :

a. lise chaque jour la presse nationale ?

b. soit un lecteur occasionnel et lise la presse régionale ?

94. Page 264 no 104 **Club de loisirs (d'après BAC)**

Un club de loisirs propose des activités artistiques et compte 150 inscrits :

- 15 inscrits en chant,
- 75 en danse,
- 60 en graphisme.

Chaque inscrit pratique une et une seule activité.

Parmi les inscrits en chant, 40 % sont des filles. Parmi les inscrits en danse, 68 % sont des filles. Parmi les inscrits en graphisme, 20 % sont des filles. On choisit au hasard un inscrit de ce club. Chaque inscrit a la même probabilité d'être choisi. On note F l'événement : « l'inscrit est une fille », C l'événement : « l'inscrit pratique le chant », D l'événement : « l'inscrit pratique la danse », G l'événement : « l'inscrit pratique le graphisme ».

1. Donner à partir de l'énoncé :

a. la probabilité $P(G)$.

b. la probabilité $P_G(F)$.

2. Construire un arbre pondéré représentant la situation.

95. Page 256 nos 39-40 QCM Une seule réponse exacte

39 A et B sont deux événements. On a $P(A \text{ et } B) = 0,5$, $P_A(B) = 0,6$ et $P_B(A) = 0,8$. On a :

a. $P(A) = \frac{5}{8}$ **b.** $P(A) = \frac{5}{6}$ **c.** $P(B) = 0,75$ **d.** $P(B) = 0,40$

40 A et B sont deux événements. On a $P(A) = 0,85$, $P(A \text{ et } B) = 0,32$, $P_B(A) = 0,4$. On a :

a. $P(B) = \frac{7}{8}$ **b.** $P_{\bar{A}}(B) = \frac{18}{41}$

c. $P(B) = 0,8$ **d.** $P_{\bar{A}}(B) = \frac{4}{11}$

96. Page 257 no 37

A et B sont deux événements.

On donne $P(A) = 0,72$; $P(B) = 0,41$ et $P(A \cap B) = 0,22$.

a. Compléter le tableau proposé avec les probabilités manquantes.

	A	$\bar{A}$	Total
B			
$\bar{B}$			
Total	0,72		1

b. Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

97. Page 265 no 106 **En vélo ou en bus**

a. Arthur part au lycée le matin soit en vélo avec une probabilité de 0,8, soit en bus avec une probabilité de 0,2. La probabilité qu'il arrive en retard sachant qu'il est venu en vélo est égale à 0,05, et la probabilité qu'il arrive en retard sachant qu'il est venu en bus est égale à 0,2. Construire un arbre pondéré décrivant cette situation.

b. Camille, de son côté, utilise les mêmes moyens de transport mais les données sont différentes. Elle est en retard un jour sur dix. La probabilité qu'elle ait pris le vélo sachant qu'elle a été en retard est égale à 0,1 et la probabilité qu'elle ait pris le bus sachant qu'elle n'a pas été en retard est égale à 0,15.

Construire un arbre pondéré traduisant cette situation.

c. Damien vient lui aussi au lycée en bus ou en vélo. Voici les informations connues : la probabilité qu'il vienne en vélo est égale à 0,6, sinon il vient en bus. La probabilité qu'il soit en retard est égale à 0,15, la probabilité qu'il soit venu en vélo et qu'il soit en retard est égale à 0,12. Construire un tableau à double entrée traduisant cette situation.

98. Page 265 no 110 **Qui parle anglais ?**

Dans un groupe de personnes, il y a 53 % d'hommes. On sait aussi que 40 % des hommes et 30 % des femmes de ce groupe parlent couramment anglais. On interroge au hasard une des personnes de ce groupe. On note F l'événement « être une femme » et A l'événement « parler couramment anglais ».

a. Construire un arbre pondéré représentant cette situation et inscrire sur chaque branche la probabilité associée.

b. Calculer $P(A)$.

99. On place dans un sac cinq cartons sur lesquels sont écrits chacun des mots de la phrase :

VIVE EUCLIDE ET SA CLIQUE

On tire un carton au hasard. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de voyelles du mot tiré.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ? Décrire l'événement « X = 1 ».

b) Définir une autre variable aléatoire Y à partir de cette expérience aléatoire.

100. On dispose de deux dés cubiques non truqués. L'un a cinq faces rouges et une face verte ; l'autre a une face rouge, deux vertes et trois bleues. On jette les deux dés. On gagne 5 € si les deux faces obtenues sont rouges, 2 € si elles sont vertes et on perd 1€ si les deux faces sont de couleurs différentes.

On appelle X la variable aléatoire égale au gain algébrique (gain ou perte) ainsi réalisé.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

101. Un particulier crée un jeu de loterie instantané pour lequel 500 tickets sont imprimés.

- 1 ticket fait gagner 300 €, 4 tickets font gagner 50 €, 5 tickets font gagner 20 € et 90 tickets font gagner 2 €.
- Le prix de vente du ticket est 2 €.

On appelle G la variable aléatoire qui, à chaque ticket tiré au hasard, associe le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire la différence entre le gain réalisé et le prix du ticket.

a) Déterminer la loi de probabilité de G.

b) Calculer et interpréter l'espérance mathématique de G.

102. Dans un magasin d'électroménager, un acheteur potentiel s'intéresse à un lave-linge et à un sèche-linge.

- La probabilité pour qu'il n'achète que le lave-linge est 0,18.
- La probabilité pour qu'il n'achète que le sèche-linge est 0,04.
- La probabilité pour qu'il achète les deux appareils est 0,42.

a) Quelle est la probabilité pour qu'il n'achète aucun des deux appareils ?

b) Le lave-linge coûte 500 € et le sèche-linge coûte 300 €. Soit D la variable aléatoire associée à la dépense du client. Déterminer la loi de probabilité de D.

c) Calculer l'espérance mathématique de D et son écart-type.

d) Le service clientèle du magasin sait qu'il se présente en moyenne chaque semaine 25 acheteurs potentiels pour ces deux appareils. Quel chiffre d'affaires hebdomadaire le magasin peut-il espérer réaliser ?

103. Page 295 nº 105 **Des rouges et des blanches**

Une urne contient 10 boules, des rouges et des blanches. On tire deux boules avec remise. X est la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches obtenues. On sait que $P(X=1)=0{,}48$ et on se propose de trouver le nombre n de boules rouges contenues dans l'urne.

1. Quelles sont, *a priori*, les valeurs possibles de n ?

2. On ne tire qu'une boule dans l'urne. Donner, en fonction de n, la probabilité d'obtenir :

a. une boule rouge,

b. une boule blanche.

3. a. En utilisant un arbre pondéré, traduire que : $P(X=1)=0{,}48$.

b. Simplifier l'équation obtenue et constater que vous obtenez l'équation : $n^2-10\,n+24=0$.

c. Résoudre cette équation et répondre au problème posé.

104. Page 296 nº 106 **Espérance maximale**

Une urne contient des jetons bleus, des jetons blancs et des jetons rouges. 10 % des jetons sont bleus et il y a trois fois plus de jetons blancs que de jetons bleus. Un joueur tire un jeton au hasard.

1. Calculer la probabilité qu'il obtienne :

a. un jeton bleu

b. un jeton blanc

c. un jeton rouge

2. Lorsque le jeton tiré est rouge, le joueur gagne une somme x en euros. Lorsque le jeton tiré est blanc, le joueur gagne le carré de cette somme et lorsque le jeton est bleu, il perd le cube de cette somme. G est la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

a. On suppose que $x=2$. Déterminer la loi de probabilité de G. Quel est le gain moyen que l'on peut espérer réaliser sur un grand nombre de tirages ?

b. Répondre aux questions du a. lorsque $x=5$. À la place du joueur, préférez-vous que $x=2$ ou que $x=5$?

c. Cherchons à déterminer s'il existe une valeur de x telle que l'espérance mathématique de G soit maximale. Le résultat sera arrondi au centime d'euro. Montrer que le problème revient à déterminer si la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$f(x)=-0{,}1x^3+0{,}3x^2+0{,}6x$

possède un maximum.

Étudier les variations de f et répondre au problème posé.

==