collège
MELKART
soyons à l'écoute

DEVOIRS DE VACANCES
ÉTÉ 2023

3ème vers 2nde

Mathématiques

Les devoirs de vacances proposés sont obligatoires pour certains élèves, et conseillés pour tous les autres, afin de consolider les acquis du travail effectué depuis le début de l'année.

Pour les élèves dont les devoirs sont obligatoires, il est impératif de les travailler sérieusement et les rendre complets, pour ne pas compromettre la prochaine année scolaire et entamer dans de bonnes conditions le cycle secondaire.

Ils sont à répartir sur 4 semaines, en alternant les activités algébriques et géométriques.

Bonnes vacances à tous !

Activités numériques et algébriques

1- Effectuer les calculs suivants ; donner une écriture simplifiée des résultats :

$A = \dfrac{(-2)^3 \times (-3)^2}{(-5)^2 \times 6^2}$; $B = \left[\dfrac{2^3 \times (-3)^2}{36}\right]^{-1}$; $C = \left[\dfrac{(-16) \times 3^2}{24 \times (-3)}\right]^{-1} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$;

$D = \dfrac{(2a^2b^3)^3}{(3ab^4)^2}$; $E = \dfrac{(ab^3)^2}{a^3b^2}\left[\dfrac{a}{b^4} + \dfrac{a^2}{b^3}\right]$; $F = \dfrac{a^2b^3}{(ab)^3} \div \left(\dfrac{a^2b^4}{a^3b^5}\right)^{-1}$;

$G = \left[\dfrac{2a^3b^{-3}c^{-1}}{a^{-3}b^{-4}c^{-2}}\right]^2$; $H = \left[\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 \times \left(-\dfrac{2}{5}\right)^2\right] \times \left[\dfrac{2^3 \times 121}{11^2 \times 17}\right]$;

$I = a^2 + 4b^2 + (a+b)^2 - (a-b)^2$; $J = \left(\dfrac{2a}{3} - \dfrac{5a}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{4a^2}{9} + \dfrac{25a^2}{4}\right)$.

2- Factoriser les polynômes suivants :

$A = x^2 - 49$; $B = x^4 - y^4$; $C = -3x^2 + 12x - 12$;

$D = x^2 + 4x + 4 - y^2$; $E = (x-3)(x^2-x+1) + (2x-1)(x-3) - (x^2+4)(x-3)$;

$F = (x-2)^2 - (3x+1)(x-2) + (4-2x)(x+1)$.

3- On donne : $f(x) = (x+6)^2 - 2(x+1)(x+6)$ et $g(x) = (3x+2)^2 - 4(x-2)^2$.

a) Développer, réduire et ordonner $f(x)$ et $g(x)$.

b) Ecrire $f(x)$ et $g(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

c) Calculer $f(0)$, $f(-3)$ et $g\left(-\frac{2}{3}\right)$.

d) Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

e) Soit $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Simplifier $h(x)$ après avoir précisé les conditions d'existence, puis calculer $h(\sqrt{2})$.

f) Résoudre : $* \; h(x) = 0$; $* \; h(x) = 1$; $* \; h(x) = -\frac{5}{16}$.

4- Résoudre les équations suivantes :

a) $x^3 + x^2 - 9x - 9 = 0$ b) $(x-1)^2 = (2x+1)^2$.

5- Soit les expressions :

$A = \left(1 - 3\sqrt{2}\right)^2 - \left(5 + \sqrt{3}\right)^2$ et $B = \left(\sqrt{2} - 1 + \sqrt{3}\right) \times \left(\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3}\right)$.

Développer et simplifier les expressions A, B et $\dfrac{A}{B}$.

6- On donne $a = \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$, et on pose $u = a + b$ et $v = a - b$.
Montrer que $ab = 1$. Calculer u^2 et v^2 ; en déduire u, v et une expression plus simple de a et b.

7- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $(x-2)(x+1) = (x-3)(x-1) - (4x-4)$; b) $(2x+5)(x-1) = x^2 - 1$;

c) $\dfrac{3(x+5)}{7} + 4 = \dfrac{1-3x}{28}$; d) $\dfrac{21-x}{36} + \dfrac{11}{4} = 2\left(\dfrac{x}{3} - 1\right) - \dfrac{5(2x-15)}{12}$;

e) $\dfrac{3x}{14} - \dfrac{x}{15} + 1 = \dfrac{x}{6} + \dfrac{7}{3}$; f) $(3x-6)(x^2-1) - (5x-10)(x+1)^2 = 0$;

g) $(3x-1)(8x-3) - (1-3x)(x-1) - 2(3x-1)(x+1) = 0$.

8- Trouver trois entiers naturels consécutifs dont la somme est égale à 453.

9- Trouver un nombre entier naturel dont le quart surpasse de 10 le sixième.

10- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $x^2 + (x+4)^2 > 2(x-1)(x+2) + 38$

b) $\frac{x+1}{2} - \frac{x+3}{3} > \frac{1-x}{3} + \frac{3x+1}{6}$

c) $\frac{9}{14}\left(2x + \frac{2}{3}\right) - \frac{5}{4}\left[\frac{6x}{7} - 2(x-4)\right] \geq 0$

d) $\frac{(x-1)(5x-2)}{3} - x^2 \leq \frac{2(x-1)(x+1)}{3}$

11- On considère les fonctions f et g : $f(x) = 4x^2 - 1 - (2x-1)(x+6)$
$g(x) = (x-5)(2x-3) + x^2 - 25$

- Factoriser $f(x)$ et $g(x)$. On pose q la fonction rationnelle définie par : $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
- Quel est le domaine de définition de q ? Simplifier $q(x)$. Calculer $q(\sqrt{2})$.

12- Effectuer les calculs suivants ; rendre rationnels les dénominateurs.

a) $(3\sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{18})(3 - \sqrt{12} + \sqrt{27})$

b) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$

c) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

d) $\sqrt{5}(\sqrt{5} - \sqrt{2})(3\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$

e) $\frac{2-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+4}$

f) $\sqrt{7} + \sqrt{2} \times \sqrt{14} - \sqrt{3} \times \sqrt{21}$

g) $\sqrt{75} + 2\sqrt{147} - 9\sqrt{48}$

h) $3\sqrt{2}\,(3 - \sqrt{3}) + \sqrt{27}(\sqrt{2} - 1)$

13- On considère la fonction polynôme f : $f(x) = (x-1)(2x-3)^2 - (x-1)^2(2x-3)$
Factoriser $f(x)$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

14- Un objet payé 500 € est mis en loterie. En vendant le billet de loterie à 12 €, on gagne autant que ce qu'on perdrait en le vendant à 8 €. Quel est le nombre des billets de loterie ?

15- On pose $f(x) = (3x-4)(x-1) - 3(1-x)^2 + x^2(4x-4)$.

- Développer, réduire et ordonner $f(x)$.
- Factoriser $f(x)$, puis résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
- On pose $F(x) = \frac{4x^3-4x^2-x+1}{(5-x)(4x^2-1)}$. Donner l'ensemble D de définition de F, puis simplifier $F(x)$ pour $x \in D$.
- Calculer $F(3)$, $F(1)$ et $F\left(\sqrt{5}\right)$.

16- Démontrer que : $\frac{\sqrt{8}+33}{7-\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 5$.

17- La recette d'une salle de cinéma s'élève à $2\,396$ €. Les places coûtent 26 € à l'orchestre et 21 € au balcon. 101 spectateurs ont assisté à la séance. Combien d'entre eux se trouvaient au balcon ?

18- Calculer : $A = \sqrt{80} - 10\sqrt{20} + 2\sqrt{45}$; $B = \frac{5\sqrt{48}}{4\sqrt{21}} \times \frac{3\sqrt{14}}{2\sqrt{75}}$.

19- On donne $A(x) = 49x^2 - 4 - (14x-4)(4x-1)$.

a) Développer, réduire et ordonner $A(x)$.
b) Résoudre $+8 = 0$.
c) Calculer les racines de $A(x)$.

20- On partage une somme entre trois personnes, proportionnellement aux nombres 4, 5 et 7. Calculer la part de chaque bénéficiaire, sachant que le double de la part du premier avec le triple de celle du second font $207\,000$ LL.

21- Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $4(2x+1) + 4x^2 - 1 = -3x(2x+1)$
b) $x\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \geq x + 2$

22- On pose $f(x) = (7x+2)^2 - (5x+1)^2$ et $g(x) = 12x(1-2x) - 3(2x-1)$.

a) Développer, réduire et ordonner $f(x)$.
b) Factoriser $f(x)$ et $g(x)$.
c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.
d) On pose $P(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Pour quelles valeurs de x, $P(x)$ existe-t-elle ? Simplifier dans ce cas $P(x)$.
e) Calculer $P\left(\frac{1}{3}\right)$ et $P\left(\frac{1}{18}\right)$, puis prouver que $\sqrt{P\left(\frac{1}{3}\right)} \times \sqrt{P\left(\frac{1}{18}\right)}$ est un décimal.
f) Construire dans un même repère les droites d'équation $y = -2x + 1$ et $y = 2x + 1$.
Trouver graphiquement et par le calcul, la valeur de x tel que $P(x) = 1$.

23- Voici les moyennes trimestrielles d'une classe de 3ème en mathématiques :
$7 ; 13 ; 7 ; 9 ; 7 ; 10 ; 10 ; 15 ; 7 ; 13 ; 9 ; 8 ; 7 ; 12 ; 17 ; 16 ; 17 ; 13 ; 11 ; 6 ; 9 ; 13 ; 15 ; 16 ; 13.$

a) Ordonner ces notes par ordre croissant et en déduire les notes les plus fréquentes et la note médiane.
b) Regrouper ces notes en classes d'amplitude 3 à partir de la note la plus faible.
c) Tracer le diagramme des fréquences cumulées croissantes à partir de ces classes.
d) Déterminer graphiquement la médiane et comparer les deux résultats.

24- Le tableau suivant fournit l'analyse, par régions et types de produits, de la production sidérurgique de l'année1979 (en milliers de tonnes).

Type \ Région	Est	Nord	Centre	Sud	Ouest
Fontes brutes	9 261	6 815	0	2 602	738
Aciers bruts	10 232	8 106	747	3 385	888

a) Quelle est la production totale d'aciers bruts pendant l'année 1979.
b) Représenter la répartition de cette production selon les régions, sur un graphique semi-circulaire.
c) Quelle est la production sidérurgique totale ? Représenter sa répartition sur un graphique circulaire.

Activités géométriques

25- a) α étant un angle aigu, on donne $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Calculer $\cos\alpha$ et $\tan\alpha$.
b) Peut-on calculer un angle α tel que $\sin\alpha = \frac{10}{3}$?

26- a) Dans un triangle ABC rectangle en A, on donne $\mathrm{AB} = 3$ et $\cos\widehat{\mathrm{B}} = \frac{3}{5}$. Calculer AC et BC.
b) Dans un triangle ABC rectangle en A, on donne $\mathrm{BC} = 6{,}4$ et $\tan\widehat{\mathrm{B}} = 0{,}8$. Calculer AB et AC.

27- Soit deux points B et C, tels que $\mathrm{BC} = 10$. On trace le cercle (Γ) de diamètre $[\mathrm{BC}]$.
Placer un point A sur le cercle (Γ) tel que $\mathrm{BA} = 5$.

a) Quelle est la nature du triangle ABC ? Calculer AC.
b) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). Calculer HB et HC, en considérant des triangles semblables.

28- Tracer un carré ABCD de 6 cm de côté. Marquer le point E, milieu de $[\mathrm{CD}]$.

a) Calculer la distance AE. Donner une valeur approchée à 1 mm près.
b) Soit F le projeté orthogonal de D sur (AE). Montrer que $\mathrm{EF} = \frac{3}{\sqrt{5}}$, puis calculer DF en utilisant $\cos\widehat{\mathrm{AED}}$.

29- Soit ABC un triangle rectangle en A, dans lequel $\widehat{\mathrm{B}} = 60°$ et $\mathrm{BC} = 2\mathrm{a}$.

a) Soit H le projeté orthogonal de A sur $[\mathrm{BC}]$. Calculer AC, AB, AH, BH et CH en fonction de a.
b) On trace la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{\mathrm{B}}$ du triangle ABC, elle coupe $[\mathrm{AC}]$ en D.
Démontrer que les triangles ABD et ABC sont semblables et évaluer leur rapport de similitude.
Établir la relation $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AD} \times \mathrm{AC}$.

30- L'unité de longueur est le centimètre. Soit $[AO]$ un segment de longueur 6 cm ; sur la droite perpendiculaire en O à $[AO]$, et de part et d'autre de O, on considère les points B tel que $\widehat{OAB} = 45°$ et C tel que $OC = 2\sqrt{3}$ cm.
Le cercle de diamètre $[AO]$ coupe $[AB]$ en D et $[AC]$ en E. On note H son centre.

a) Faire la figure (on prendra $\sqrt{3} \approx 1{,}7$ pour placer le point C).
b) Quelle est la nature des triangles AOB et AOD ? Montrer que D est le milieu de $[AB]$. Calculer AB.
c) Quelle est la nature du triangle AOE ?
d) Calculer $\tan \widehat{OAC}$. Utiliser la calculatrice pour trouver la mesure en degrés de l'angle $\widehat{OAC}$.
e) Dans le triangle OAE déterminer $\sin \widehat{OAE}$, puis OE. Démontrer que le triangle OHE est équilatéral.

31- Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'unité de longueur est le cm.
On considère les droites (D_1) et (D_2) d'équations : $(D_1): y = 2x + 4$; $(D_2): y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

a) Construire (D_1) et (D_2). Démontrer que (D_1) passe par le point $B(-5; -6)$ et que (D_2) passe par le point $C(5; -1)$.
b) Montrer que les droites (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires.
c) Soit A le point d'intersection des droites (D_1) et (D_2). Déterminer les coordonnées du point A. Calculer les longueurs AB et BC.
d) Soit α la mesure, en degrés, de l'angle $\widehat{ACB}$. Déterminer $\sin \alpha$.
En déduire une valeur approchée de α à un degré près par défaut.

32- Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, placer les points $A(-1 ; 2)$, $B(2 ; 3)$ et $C(1 ; -4)$.

a) Calculer les distances AB, AC et BC.
Déterminer alors la nature du triangle ABC et calculer $\cos \hat{C}$.
b) Déterminer l'équation de la droite (BC) et celle de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire à (BC).
c) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC). Calculer les coordonnées de H.

33- Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(-2 ; 2)$, $B(2 ; 0)$ et $C(x ; 3)$, où $x \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer x pour que le point C appartienne à la médiatrice de $[AB]$. Dans la suite, on prendra $x = 1$.
b) On considère le cercle (Γ) de centre C passant par A et B. Quel est son rayon r ?
Déterminer les coordonnées des points A' et B' diamétralement opposés à A et B sur (Γ).
c) Montrer que le triangle ABA' est rectangle isocèle. En déduire la nature du quadrilatère $ABA'B'$.
d) Montrer que le cercle (Γ) passe par O. Quels sont les points d'intersection du cercle (Γ) avec les axes ?

34- Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(3 ; 4)$, $B(1 ; -2)$ et $C(-2 ; -1)$.

a) Calculer AB, AC et BC. En déduire la nature du triangle ABC.
b) Soit E le milieu de $[AC]$ et D le symétrique de B par rapport à E.
Déterminer les coordonnées de E. Quelle est la nature de $ABCD$?

35- Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on marque les points : $A(-3 ; -2)$, $B(-4 ; 2)$, $C(5 ; 0)$ et $R(-7 ; -3)$.

a) Calculer AB, AC et BC. Quelle est la nature du triangle ABC ?
b) Démontrer que les points A, B et C sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
c) On appelle (d) la tangente en B à ce cercle. Le point R est-il sur (d) ? sur (AC) ?

36- ABC est un triangle équilatéral de côté a. La hauteur issue de A coupe $[BC]$ en H.

a) Calculer AH en fonction de a.
b) Préciser la position du centre O du cercle circonscrit au triangle AHB. Quel est le rayon de ce cercle ?
c) Démontrer que les droites (OH) et (AC) sont parallèles.
d) Soit P le symétrique de O par rapport à H. Quelle est la nature du quadrilatère $COBP$?
e) Démontrer que le quadrilatère $AOPC$ est un parallélogramme.

37- ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 18$ mm et $AC = 24$ mm.
M est le milieu de $[BC]$. La médiatrice Δ est $[BC]$ coupe (AC) en H et (AB) en E.

a) Calculer BC.
b) Montrer que les triangles EMB et CAB sont semblables et calculer EB et EM.
c) Montrer que les points E, A, M et C sont sur un même cercle, dont on précisera le centre O et calculera le rayon.

38- Soit un cercle de centre O, de rayon R. Construire un rayon $[OJ]$ puis la médiatrice de $[OJ]$, qui coupe le cercle en A et B, et coupe $[OJ]$ en I. On trace la tangente en A au cercle qui coupe (OJ) en P et (BJ) en Q.

a) Quelle est la nature du quadrilatère $AOBJ$?

b) Montrer que les triangles AQB et PAI sont isométriques. Calculer en fonction de R les longueurs AI, PI, PJ et PA.

c) Montrer que $AIJQ$ est inscriptible dans un cercle dont on précisera le centre et le rayon en fonction de R.

39- On donne un triangle ABC, rectangle en A, dont l'angle $\widehat{B}$ mesure $60°$. La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ coupe $[BC]$ en D. La parallèle à (AD) menée par B coupe (AC) en E. On pose $AB = a$.

a) Calculer en fonction de a, les longueurs BC, AC et AE.

b) La bissectrice de $\widehat{BAE}$ coupe $[BE]$ en I. La perpendiculaire menée de B à (AD) coupe (AD) en H et (AC) en F. Quelle est la nature du quadrilatère $AIBH$? Exprimer, en fonction de a, les longueurs FC, AH et BF.

40- $ABCD$ est carré de côté a. On construit un triangle équilatéral dont l'un des côtés est la diagonale $[AC]$ et dont le troisième sommet E est situé du côté de B. On désigne par O le milieu de $[AC]$.

a) Montrer que E, B, O et D sont alignés.

b) Calculer BE en fonction de a.

c) Montrer que $EB \times ED = AB^2$.

d) On mène de E la tangente (EP) au cercle circonscrit au carré. Montrer que $EP = a$.

41- Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On désigne par (D_1) et (D_2) les droites d'équations respectives: $(D_1): y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ et $(D_2): y = 2x + 4$.

a) Construire les droites (D_1) et (D_2).

b) La droite (D_1) coupe l'axe des abscisses en A et l'axe des ordonnées en H ; la droite (D_2) coupe l'axe des abscisses en B et l'axe des ordonnées en C ; et les deux droites (D_1) et (D_2) se coupent en K.
Calculer les coordonnées des points A, B, C, H et K.

c) Démontrer que les droites (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires, ainsi que les droites (AC) et (BH).

42- Dans un repère orthonormé, d'axes $x'Ox$ et $y'Oy$, on donne les points $A(5;0)$ et $B(4;2)$.

a) Calculer les longueurs AB, OB et OA. En déduire la nature du triangle OAB.

b) Écrire l'équation de la droite (AB). Le point $C\left(\frac{1}{2};\frac{17}{2}\right)$ est-il situé sur (AB) ?

c) Déterminer l'équation de la droite (d) parallèle à (AB) passant par O.

d) Déterminer les coordonnées du point D, quatrième sommet du parallélogramme $OADB$.
Justifier que B est le milieu de $[ED]$.

43- Les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ de longueurs respectives a, b et c d'un triangle ABC sont directement proportionnels aux nombres 7, 5 et 4.

a) Le périmètre de ce triangle étant 32 cm, calculer les longueurs de ses côtés.

b) Soit D un point de $[AB]$. La parallèle menée de D à (BC) coupe (AC) en E et la parallèle menée de D à (AC) coupe (BC) en F. On pose $AD = x$. Exprimer DE et DF en fonction de x en utilisant des triangles semblables.

c) Déterminer, par le calcul, le nombre x pour que $DECF$ soit un losange.

44- Le plan est rapporté à un repère $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On considère les droites $(D_1): 3x - 2y + 4 = 0$ et $(D_2): -x + \frac{2}{3}y + 2 = 0$.

a) Indiquer si les points $A\,(-1;0{,}5)$ et $B\,(-2;5)$ appartiennent à (D_1).

b) Déterminer l'abscisse du point C de (D_2) dont l'ordonnée est -3.

c) Construire les droites (D_1) et (D_2). Que peut-on dire de ces deux droites ?

d) Déterminer une équation de la droite (AB).

e) Ecrire une équation de la droite (D_3) passant par C et perpendiculaire à (D_2).

45- Dans un système orthonormé $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$, on considère les points $\mathrm{B}\ (0\ ;-2)$ et $\mathrm{C}\ (6\ ;1)$.
On pose (D) et (D') les droites d'équations respectives : $y=-2x+3$ et $y=x-3$.

a) Tracer (D) et (D'), puis placer les points B et C.
b) On désigne par I le point d'intersection de(D) et (D'). Calculer les coordonnées de I.
c) Déterminer une équation de la droite (BC) et vérifier que les trois points I, B et C sont alignés.
d) On donne le point $\mathrm{S}(0\ ;\mathrm{m})$, où m est un nombre réel. Calculer SB^2 et SC^2 en fonction de m.
Déterminer m pour que le triangle SBC soit isocèle de sommet S. $(\mathrm{SB}=\mathrm{SC})$.

46- $[\mathrm{AC}]$ est un segment de longueur $8\ \mathrm{cm}$ et de milieu B. (C) est le cercle de centre O, de diamètre $[\mathrm{AB}]$.

a) Faire une figure et construire une tangente au cercle (C) passant par C. Cette tangente coupe le cercle (C) en T. Justifier la construction, puis calculer la longueur CT.
b) Montrer que les triangles CBT et CTA sont semblables et calculer le rapport $\frac{\mathrm{TA}}{\mathrm{TB}}$.
c) (TO) recoupe le cercle (C) en T' et La droite $(\mathrm{T'B})$ coupe (CT) en I.
Montrer que B est le centre de gravité du triangle CTT'.
d) On mène de I la parallèle à $(\mathrm{TT'})$ qui coupe $(\mathrm{CT'})$ en J. Montrer que les points T, B et J sont alignés.

47- On considère un cercle fixe de centre O, de rayon R, de diamètre $[\mathrm{AB}]$, et une corde variable $[\mathrm{CD}]$ telle que (CD) et (AB) soient parallèles (l'arc AC étant plus petit que l'arc AD). La tangente en A au cercle coupe (CD) en E.

a) Comparer les triangles AEC et AED. En déduire la relation : $\mathrm{AE}^2=\mathrm{EC}\times\mathrm{ED}$.
Pouvait-on prévoir directement cette relation ?
b) La perpendiculaire menée par C à (AD) coupe (AE) en P. Démontrer que le triangle ACP est isocèle.
c) La perpendiculaire menée de O à (AD) coupe (CD) en I.
Démontrer que I est le centre du cercle circonscrit au triangle APD.
d) Démontrer que le quadrilatère OIDB est un parallélogramme. En déduire que le quadrilatère AIDO est un losange.

48- On considère un triangle ABC, isocèle en A, de hauteur $[\mathrm{AD}]$ et tel que $\mathrm{BC}=\mathrm{AD}=10$.

a) Faire une figure en traçant le segment $[\mathrm{BC}]$ en premier. (Justifier la construction)
b) Le cercle de diamètre $[\mathrm{BC}]$ recoupe $[\mathrm{BA}]$ en F, $[\mathrm{CA}]$ en E et coupe $[\mathrm{AD}]$ en I.
Quelle est la nature des triangles BFC et BCE?
Démontrer que les droites (BE), (CF) et (AD) sont concourantes en un point H.
c) Justifier que $\mathrm{AC}=5\sqrt{5}$.
En exprimant de deux façons différentes l'aire du triangle ABC, démontrer que : $\mathrm{AD}\times\mathrm{BC}=\mathrm{BE}\times\mathrm{AC}$.
En déduire la distance BE, puis calculer la distance EC.
d) Exprimer $\tan\widehat{\mathrm{B}}$ dans les triangles BCE et BDH.
Calculer alors la distance HD et démontrer que H est le milieu du segment $[\mathrm{DI}]$.

49- Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, placer les points $\mathrm{A}(-1;-1)$, $\mathrm{E}(3\ ;5)$ et $\mathrm{N}(6\ ;3)$.

a) Calculer les coordonnées du milieu U de $[\mathrm{AE}]$.
b) Calculer les coordonnées du point C, symétrique de N par rapport à U.
Quelle est la nature du quadrilatère CANE ?
c) Prouver que le triangle ANE est rectangle. Calculer l'aire du quadrilatère CANE.

50- Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O},\mathrm{I},\mathrm{J})$ on donne les points $\mathrm{A}(-1,3)$, $\mathrm{B}(-2,1)$ et $\mathrm{C}(1,-3)$.

a) Calculer les coordonnées du point D, quatrième sommet du parallélogramme ABCD.
b) Déterminer une équation de la droite (AB).
c) Déterminer une équation de la droite (Δ) passant par C et perpendiculaire à (AB).
d) Calculer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de C sur (AB).
e) Calculer la distance du point C à la droite (AB).
f) Calculer l'aire du triangle ABC.

==========